

১০৩। $f(x) = \cos x$ এবং $4x^2 + 9y^2 = 36$ একটি উপবৃত্ত।

ক) $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$ নির্ণয় কর।

খ) $\int_0^1 x \{f(x)\}^4 dx$ নির্ণয় কর।

গ) যোগজীকরণের মাধ্যমে উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{ধরি, } \ln x = z \\ \therefore \frac{1}{x} dx = dz \end{array} \right. \\ &= \int \cos z dz \\ &= \sin z + C \\ &= \sin(\ln x) + C \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

৩(খ) নং প্রশ্নের উত্তর

উদ্দীপক হতে পাঠে, $f(x) = \cos x$

$$\therefore \{f(x)\}^4 = \cos^4 x$$

$$= \frac{1}{4} (2 \cos^2 x)^2$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)^2$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos^2 2x \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} (1 + \cos 4x)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x.$$

$$\text{Ques 7)} \int_0^{\pi} x \{f(x)\}^4 dx = \int_0^{\pi} x \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{3}{8} x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int_0^{\pi} x \cos 4x dx$$

$$= \frac{3}{8} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \left[x \int \cos 2x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \right\} \cos 2x dx \right] dx$$

$$+ \frac{1}{8} \left[x \int \cos 4x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) \right\} \cos 4x dx \right] dx$$

$$= \frac{3}{16} \cdot \pi^2 + \frac{1}{2} \left[x \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} dx \right]_0^{\pi}$$

$$+ \frac{1}{8} \left[x \cdot \frac{\sin 4x}{4} - \int \frac{\sin 4x}{4} dx \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{16} \pi^2 + \frac{1}{4} [x \sin 2x]_0^{\pi} + \frac{1}{4} \left[\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$+ \frac{1}{32} [x \sin 4x]_0^{\pi} + \frac{1}{32} \left[\frac{\cos 4x}{4} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \cdot [\pi \sin 2\pi - 0] + \frac{1}{8} [\cos 2\pi - \cos 0]$$

$$+ \frac{1}{32} [\pi \sin 4\pi - 0] + \frac{1}{128} [\cos 4\pi - \cos 0]$$

$$= \frac{3\pi^2}{16} + 0 + \frac{1}{8} (0) + \frac{1}{32} (0) + \frac{1}{128} (0)$$

$$= \frac{3\pi^2}{16}$$

$$\text{Ans. } \frac{3\pi^2}{16}$$

উদ্দীপক হতে দাও।

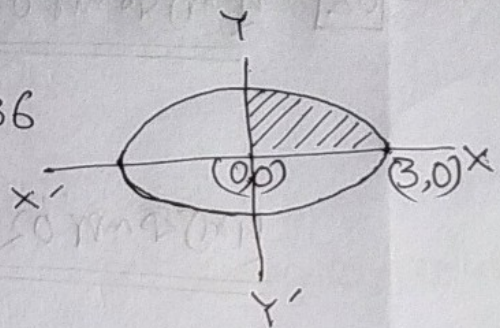
উপবৃত্তের সমীকরণ, $4x^2 + 9y^2 = 36$

$$\text{বা, } 9y^2 = 36 - 4x^2$$

$$\text{বা, } y^2 = \frac{1}{9} (36 - 4x^2)$$

$$\text{বা, } y^2 = \frac{4}{9} (9 - x^2)$$

$$\therefore y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$$



২ম চতুর্ভাগে y বিন্দু বসে $y = \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$ — (1)

উপবৃত্তটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুতে

$$y = 0 \text{ বা, } \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2} = 0 \text{ বা, } 9 - x^2 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 = 9$$

$$\therefore x = \pm 3$$

$\therefore x$ অক্ষের বিন্দুকে দিকে ছেদবিন্দু (3,0).

এখন, উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল = $4 \times$ (২ম চতুর্ভাগে আয়তন ক্ষেত্রফল)

$$= 4 \int_0^3 y \, dx$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{3} \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \, dx \quad \text{[1 নং ২তে]}$$

$$= \frac{8}{3} \left[\frac{x \sqrt{9 - x^2}}{2} + \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x}{3} \right]_0^3$$

$$= \frac{8}{3} \left[0 + \frac{9}{2} (\sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0) \right]$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \sin^{-1} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= 12 \cdot \frac{\pi}{2}$$

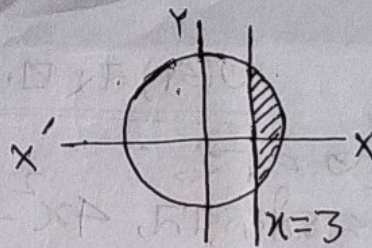
$$= 6\pi \text{ বর্গ একক}$$

Ans. 6π বর্গ একক.

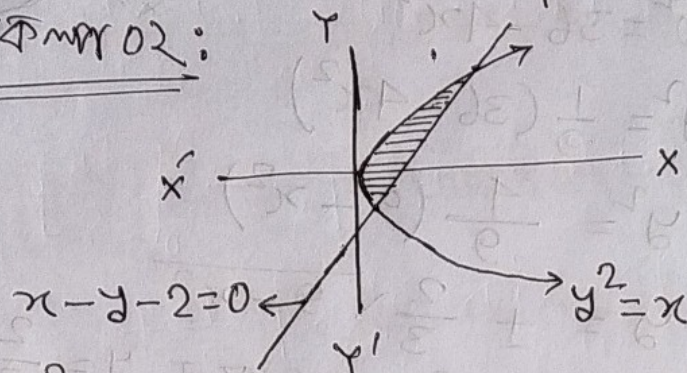
বিধিান দ্রষ্টব্য
সমস্যাগুলি অকৃত্যক, গণিত
বেসজ্ঞানসম্মত কলেজ চট্টগ্রাম

08] দ্রষ্টব্যকল্প ০২:

প্র.০২



দ্রষ্টব্যকল্প ০২:



ক) $\int_1^{e^2} \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) দ্রষ্টব্যকল্প ০২ এ বর্ণিত বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 = 25$ হলে গাঢ় অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) দ্রষ্টব্যকল্প ০২ হতে চাওয়া কৃত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

৪(ক) নং প্রশ্নের উত্তর

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$$

$$\text{ধরি, } 1 + \ln x = z$$

$$\therefore \frac{1}{x} dx = dz$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & e^2 & 1 \\ \hline z & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{z} dz$$

$$= [\ln z]_1^3$$

$$= \ln 3 - \ln 1$$

$$= \ln 3 \text{ Ans.}$$

৪(খ) নং উত্তর

পৃ. ১৩

দ্রুত বৃত্তটির সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\text{বা } y^2 = 25 - x^2$$

$$\text{বা, } y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

$\therefore$ ১ম চৌকোণে y বিন্দুতে, $\therefore y = \sqrt{5^2 - x^2}$ — (১)

বৃত্তটি x অক্ষকে যে মূল বিন্দুতে ছেদ করে, (সমব বিন্দুতে, $y = 0$ বা, $\sqrt{5^2 - x^2} = 0$

$$\text{বা, } x^2 = 5^2$$

$$\therefore x = \pm 5$$

$\therefore x$ অক্ষের বিন্দুতে অক্ষের ছেদবিন্দু $(5, 0)$

এখন, যদি $x = 3$ ও বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধ গাঢ়

অক্ষের ক্ষেত্রফল = ২ (১ম চৌকোণের গাঢ় অক্ষের ক্ষেত্রফল)

$$= 2 \int_3^5 y \, dx$$

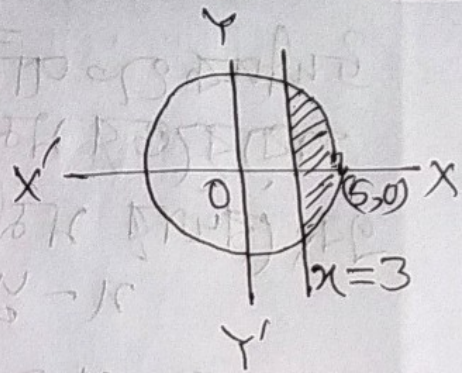
$$= 2 \int_3^5 \sqrt{5^2 - x^2} \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{x \sqrt{25 - x^2}}{2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{x}{5} \right]_3^5$$

$$= 2 \left[0 - \frac{3\sqrt{25-9}}{2} + \frac{25}{2} \left(\sin^{-1} 1 - \sin^{-1} \frac{3}{5} \right) \right]$$

$$= 2 \left[-\frac{12}{2} + \frac{25}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{3}{5} \right) \right]$$

$$= -12 + 25 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{3}{5} \right) \quad \underline{\underline{\text{Ans.}}}$$



৪(গ) নং উত্তর

প্র. ৩৪

উদ্দীপক হতে পাঠ্য

সমস্যাগুলোর সমীকরণ, $y^2 = x$ — (১)

এবং (বিপরীত) সমীকরণ,

$$x - y - 2 = 0$$

বা, $x = y + 2$ — (২) $\Rightarrow f(y)$

১) ও ২) নং হতে পাঠ্য, $y^2 = x + 2$

$$\text{অথবা } y^2 - y - 2 = 0$$

$$\text{বা, } y^2 - 2y + y - 2 = 0$$

$$\text{বা, } y(y-2) + 1(y-2) = 0$$

$$\text{বা, } (y-2)(y+1) = 0$$

$$\therefore y = -1, y = 2$$

$\therefore$ ১) ও ২) এর দুইটি-দুইটি কোর্ট $y = -1, y = 2$

সুতরাং অংশের (ফলাফল)

$$= \int_{y=-1}^{y=2} \{f_1(y) - f_2(y)\} dy$$

$$y = -1$$

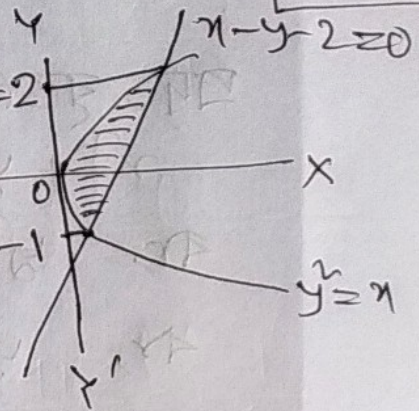
$$= \int_{-1}^2 (y+2 - y^2) dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$= \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{12+24-16}{6} - \frac{3-12+2}{6} = \frac{20+7}{6}$$

$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ বর্গ একক. } \underline{\underline{\text{Ans.}}}$$



০৩

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$$

$$g(x) = 25x^2 + 36y^2$$

কৃ.১৫

দুইটি মান্দান।

ক) $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+3}} dx$ নির্ণয় কর।

খ) $\int_0^2 f(x) dx$ নির্ণয় কর।

গ) $g(x) = 900$ এবং $x = 3$ মরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: ৩(ক)নং প্রশ্নের উত্তর

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+3}} dx \quad \left| \begin{array}{l} \text{ধরি} \\ \tan^{-1}x+3=z \\ \therefore \frac{1}{1+x^2} dx = dz \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{z}} dz$$

$$= 2\sqrt{z} + C$$

$$= 2\sqrt{\tan^{-1}x+3} + C \quad \underline{\text{Ans.}}$$

৩(খ)নং প্রশ্নের উত্তর

উদ্দীপক হতে পাই $f(x) = \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$

$$= \frac{2x+3}{x(x^2+x-2)}$$

$$= \frac{2x+3}{x(x^2+2x-x-2)}$$

$$= \frac{2x+3}{x\{x(x+2)-1(x+2)\}} = \frac{2x+3}{x(x+2)(x-1)}$$

Q.24

$$\text{dib, } \frac{2x+3}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$$

cover-up নিয়ম,

$$x=0 \text{ ত, } A = \left[\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)} \right]_{x=0} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$x=-2 \text{ ত, } B = \left[\frac{2x+3}{x(x-1)} \right]_{x=-2} = \frac{-4+3}{-2(-3)} = \frac{-1}{6}$$

$$x=1 \text{ ত, } C = \left[\frac{2x+3}{x(x+2)} \right]_{x=1} = \frac{5}{1(3)} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x+3}{x(x+2)(x-1)} = \frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1}$$

এখন, $\int_{-1}^2 f(x) dx$

$$= \int_{-1}^2 \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+2} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1} \right) dx$$

$$= -\frac{3}{2} [\ln|x|]_{-1}^2 - \frac{1}{6} [\ln|x+2|]_{-1}^2 + \frac{5}{3} [\ln|x-1|]_{-1}^2$$

$$= -\frac{3}{2} (\ln 2 - \ln 1) - \frac{1}{6} (\ln 4 - \ln 1) + \frac{5}{3} (\ln 1 - \ln 2)$$

$$= -\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{6} \ln 2^2 + \frac{5}{3} (-\ln 2)$$

$$= -\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{5}{3} \ln 2$$

$$= -\left(\frac{9+2+10}{6}\right) \ln 2 = -\frac{21}{6} \ln 2 = -\frac{7}{2} \ln 2 \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

উ(গ)নং প্র. উত্তর

প্র. ১৭

দেওয়া আছে, $8(x) = 900$

$$\text{বা, } 25x^2 + 36y^2 = 900 \quad \text{বা, } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\text{বা, } y^2 = \frac{1}{36} (900 - 25x^2)$$

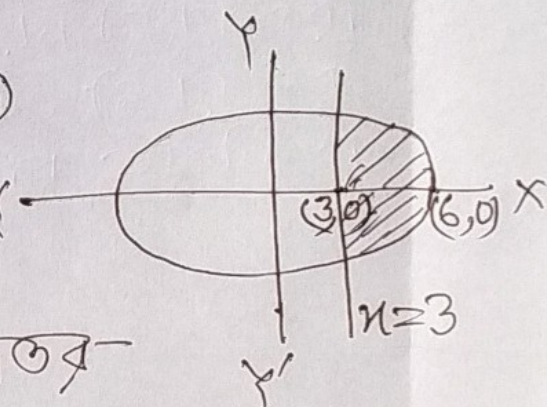
$$\text{বা, } y^2 = \frac{25}{36} (36 - x^2)$$

$$\text{বা, } y = \pm \frac{5}{6} \sqrt{36 - x^2}$$

$$\text{সমতুল্যে, } y = \frac{5}{6} \sqrt{36 - x^2} \quad \text{--- (i)}$$

$$\text{এবং চিহ্নবিশিষ্ট, } x = 3 \quad \text{--- (ii)}$$

১ নং উপবৃত্তটি x অক্ষের
বিন্দুতে দিকে $(6,0)$ বিন্দু x
দেখায়।



• (i) ও (ii) দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র-
অংশের ক্ষেত্রফল $= 2 \int_3^6 y \, dx$

$$= 2 \int_3^6 \frac{5}{6} \sqrt{36 - x^2} \, dx$$

$$= \frac{5}{3} \int_3^6 \sqrt{6^2 - x^2} \, dx$$

$$= \frac{5}{3} \left[\frac{x \sqrt{36 - x^2}}{2} + \frac{36}{2} \sin^{-1} \frac{x}{6} \right]_3^6$$

$$= \frac{5}{3} \left[\left(0 - \frac{3\sqrt{36-9}}{2} \right) + 18 \left(\sin^{-1} 1 - \sin^{-1} \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{5}{3} \left[-\frac{3\sqrt{27}}{2} + 18 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \frac{5}{3} \left[-\frac{9\sqrt{3}}{2} + 18 \cdot \frac{2\pi}{6} \right] = \frac{5}{3} \left(6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} \right) \text{ বর্গকিঃ}$$

Ans