

বেঙ্গাল দাবলিক স্কুল ও কলেজ সিই সিজেড.

দ্র: ০২

উচ্চতর গণিত ১ম দা

অধ্যায়: ১০ম (যোগজীকরণ)

৫ পাঠ দাবিকল্পনা=০২ অনুসারে সৃজনশীল প্রশ্ন
৫ উদাহরণ : বিধান দও, সহকারী অধ্যাপক

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

2. $\int 1 dx = x + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c$

8. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

9. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

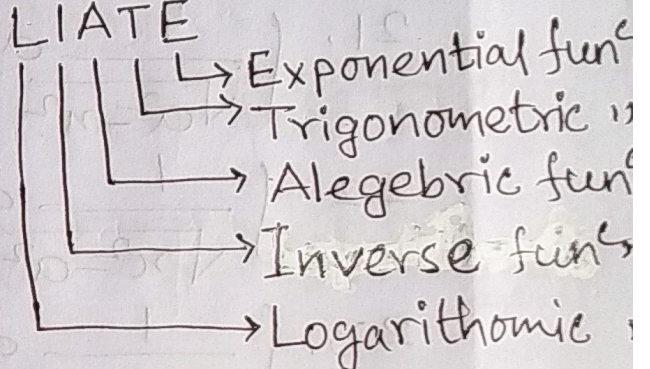
12. $\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx} + c$

13. $\int \tan x dx = \ln |\sec x| + c = -\ln |\cos x| + c$

14. $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$

15. $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$

৫ LIATE



$$16. \int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C = -\ln |\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$17. \int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$18. \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + C$$

$$19. \int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$20. \int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$21. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad \therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$$

$$22. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$23. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C$$

$$** 24. \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

$$25. \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$$

$$26. \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \, dx = 2 \sqrt{f(x)} + C$$

$$27. \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \sqrt{x} + C$$

$$28. \int e^x \{f(x) + f'(x)\} \, dx = e^x f(x) + C$$

$$29. \int e^{mx} \{m f(x) + f'(x)\} \, dx = e^{mx} f(x) + C$$

$$30. \int u v \, dx = u \int v \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(u) \int v \, dx \right\} \, dx$$

* LIATE (লিফট) খুবই প্রয়োজনীয়, ৩০ নং সূত্রে অমানুষ্যারে u ও v নির্ধারিত হবে।

৩১] দৃষ্ট্যকল্প: $g(x) = \cos^{-1} x^2$ — (i), $y^2 = 7x$ — (ii) [প্র. ০৩]

ক) $\int (\cot^2 7x + \sec^2 9x) dx$ নির্ণয় কর।

খ) যোগজীকরণ কর: $\int x g(x) dx$

গ) উদ্দীপকে বর্ণিত (ii) নং বক্ররেখা এবং $y = x$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সম্মার্যন: ২(ক) নং প্রশ্নের উত্তর

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত যোগজীকরণ রাশি} &= \int (\cot^2 7x + \sec^2 9x) dx \\ &= \int (\csc^2 7x - 1 + \sec^2 9x) dx \\ &= \int \csc^2 7x dx - \int 1 dx + \int \sec^2 9x dx \\ &= -\frac{\cot 7x}{7} - x + \frac{\tan 9x}{9} + C \quad \underline{\text{Ans.}} \end{aligned}$$

২(খ) নং প্রশ্নের উত্তর

উদ্দীপক হতে পাঠে, $g(x) = \cos^{-1} x^2$

$$\begin{aligned} \therefore \int x g(x) dx &= \int x \cos^{-1} x^2 dx \\ &= \int \cos^{-1} z \cdot \frac{1}{2} dz \quad \left| \begin{array}{l} \text{এরি, } x^2 = z \\ \therefore 2x dx = dz \\ \text{বা, } x dx = \frac{1}{2} dz \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{2} \int \cos^{-1} z dz \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos^{-1} z \int 1 dz - \int \left\{ \frac{d}{dz} (\cos^{-1} z) \right\} \int 1 dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos^{-1} z \cdot z - \int \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot z dz \right] \end{aligned}$$

$[2.08]$

$$f(z) = 1 - z^2$$
$$\therefore f'(z) = -2z$$

~~26~~ [26]

[Page 26]

$$= \frac{1}{2} \left[x^2 \cos^{-1} x^2 - \sqrt{1 - x^4} \right] + C$$

Ans.

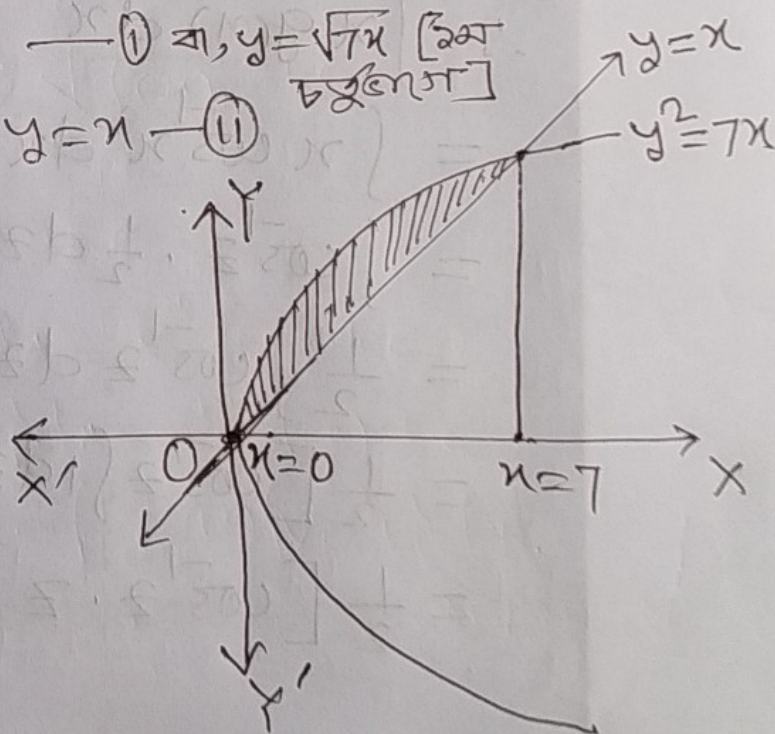
প্রদত্ত বক্ররেখা, $y^2 = 7x$ — (1) বা, $y = \sqrt{7x}$ [২য় চতুর্ভাগ]

①③ ①① २. २० नाइ,

$$\text{Ex, } x^2 - 7x = 0 \text{ [Q1]}$$

$\therefore x = 0$ অথবা $x = 720$

$$x, y = 7$$



শ্রী.০৫

১১ ও ১২ নং এর ছেদবিন্দুদ্বয়ের ক্ষেত্রে $x=0, x=7$

∴ ১১ ও ১২ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_{x=0}^{x=7} (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_0^7 (\sqrt{7x} - x) dx$$

$$= \sqrt{7} \int_0^7 \sqrt{x} dx - \int_0^7 x dx$$

$$= \sqrt{7} \cdot \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^7 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^7$$

$$= \sqrt{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot (7^{\frac{3}{2}} - 0) - \frac{1}{2} (7^2 - 0)$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot (\sqrt{7})^3 - \frac{49}{2}$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{7})^4 - \frac{49}{2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 49 - \frac{49}{2}$$

$$= 49 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 49 \cdot \frac{4-3}{6}$$

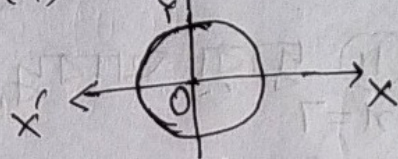
$$= \frac{49}{6} \text{ বর্গ একক}$$

∴ ক্ষেত্রফল $\frac{49}{6}$ বর্গ একক. (Ans.)

02

দ্রষ্টব্যকল্প: 02 $\Rightarrow f(x) = \cos 2x$

দ্রষ্টব্যকল্প: 02 $\Rightarrow$



ক) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $\int e^x f(x) dx$ খোঁজা বের কর।

গ) দ্রষ্টব্যকল্প 02 এ বর্ণিত ব্যুৎপাদন 5 একক
শুল্ক সমাকলনের মাধ্যমে প্রমাণিত প্রদান
নির্ণয় কর।

সমাধান: ২ (ক) নং প্রশ্নের উত্তর

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{3} - x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin^{-1} \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} + C \quad \left[\because \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + C \quad \underline{\text{Ans.}}$$

২(খ) নং উত্তর

দেওয়া আছে $f(x) = \cos 2x$

সিদ্ধি, $I = \int e^x f(x) dx$

LIATE
↓
u v

বা, $I = \int e^x \cos 2x dx$

$$= \cos 2x \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\cos 2x) \int e^x dx \right\} dx$$

$$= e^x \cos 2x - \int \sin 2x \cdot 2 \cdot e^x dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2 \int \sin 2x \cdot e^x dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2 \left[\sin 2x \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\sin 2x) \int e^x dx \right\} dx \right]$$

$$= e^x \cos 2x + 2 \left[e^x \sin 2x - \int \cos 2x \cdot 2 \cdot e^x dx \right]$$

$$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x dx$$

$$\therefore I = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4I$$

$$\text{বা, } I + 4I = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$$

$$\text{বা, } 5I = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$$

$$\therefore I = \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$$

Ans.

Bidhan Dutta.
Assistant Professor
BEPZA Public College.

২(π) নং উত্তর

উল্লম্বের বৃত্তটির কেন্দ্র (0,0)

এক কক্ষের $r=5$ বৃত্তক.

∴ বৃত্তটির সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$\text{বা, } y^2 = 25 - x^2$$

$$\text{বা, } y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

$$\therefore y = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{--- ① [এম চুক্তি]} \quad \text{--- ② [এম চুক্তি]}$$

বৃত্তটি x-অক্ষের বিন্দুতে দিকে (5,0) চিত্রিত
হয়ে আছে।

∴ বৃত্তটির (ক্ষেত্রফল) = 4 x (বৃত্তচাপ) আয়তন
চুক্তির (ক্ষেত্রফল)

$$= 4 \int_0^5 y \, dx$$

$$= 4 \int_0^5 \sqrt{5^2 - x^2} \, dx$$

$$= 4 \left[\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{x}{5} \right]_0^5$$

$$[\because \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}]$$

$$= 4 \left[(0 - 0) + \frac{25}{2} (\sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0) \right]$$

$$= 4 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 25\pi \text{ বর্গএকক.}$$

Ans. 25π বর্গএকক.

