বেপজা পাবলিক স্কুল ও কলেজ, সিইপিজেড:
উচ্চতর গণিত ২য় পত্র
অধ্যায়: ৬ষ্ঠ (কনিক)

:: পাঠপরিকল্পনা ০৭ অনুসারে সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান ::

উপস্থাপনায়: বিধান দত্ত, সহকারী অধ্যাপক, গণিত.

⊞ প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

1. কনিকের সাধারণ সমীকরণ: $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

ইহা (i) বৃত্ত হবে যদি $a=b,\ h=0$ হয়

(ii) পরাবৃত্ত হবে যদি $ab-h^2=0$ হয়

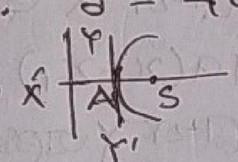
(iii) উপবৃত্ত হবে যদি $ab-h^2>0$ হয়

(iv) অধিবৃত্ত হবে যদি $ab-h^2<0$ হয়

2. পরাবৃত্তের আদর্শ বা প্রমিত সমীকরণ, $y^2=4ax,\ (a>0)$ যেখানে X অক্ষটি পরাবৃত্তের অক্ষ।

3. পরাবৃত্তের বিভিন্ন অংশ:

সমীকরণ: $y^2=4ax$

চিত্র: 

(i) উপকেন্দ্র: $S(a,0)$

(ii) শীর্ষ: $A(0,0)$

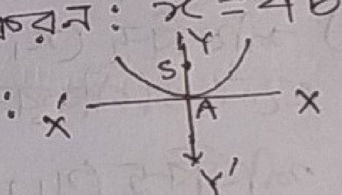
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=4a$

(iv) অক্ষের সমীকরণ, $y=0$

(v) নিয়ামকের ": $x=-a$

(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x=a$

সমীকরণ: $x^2=4by$

চিত্র: 

(i) উপকেন্দ্র: $S(0,b)$

(ii) শীর্ষ: $A(0,0)$

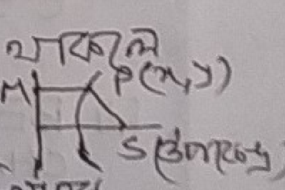
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=4b$

(iv) অক্ষের সমীকরণ, $x=0$

(v) নিয়ামকের ": $y=-b$

(vi) উপ. লম্বের ": $y=b$

4. উপকেন্দ্র S, নিয়ামকের সমীকরণ দেয়া থাকলে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $SP=PM$.

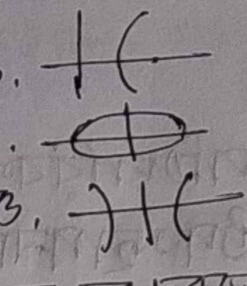


5. যেকোন কনিকের সমীকরণ, $SP = ePM$, যেখানে, e কে উৎকেন্দ্রিকতা বলে।

(i) $e = 1$ হলে কনিকটি পরাবৃত্ত.

(ii) $0 < e < 1$ হলে " উপবৃত্ত.

(iii) $e > 1$ হলে " অধিবৃত্ত.



6. উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = শীর্ষ থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্বের চারগুন।
= উপকেন্দ্র থেকে নিয়ামকের দূরত্বের দ্বিগুন।

7. যদি পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = -4ax$ এবং $x^2 = -4by$ হয় তবে 3 নং সূত্রে যথাক্রমে a এর স্থলে $(-a)$ এবং b এর স্থলে $(-b)$ বসাতে হবে।

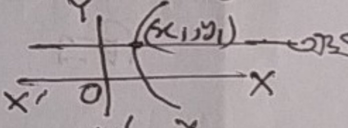
8. উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= SP = PM = a + x$ [$y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তে]

9. পরাবৃত্তের কয়েকটি বিশেষ আকার:

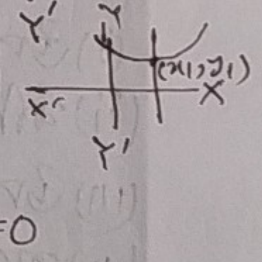
(i) মূলবিন্দুটি উপকেন্দ্র এবং X অক্ষটি পরাবৃত্তের অক্ষ হলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4a(x+a)$

(ii) মূলবিন্দুটি উপকেন্দ্র এবং Y অক্ষটি পরাবৃত্তের অক্ষ হলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 = 4b(y+b)$.

(iii) শীর্ষবিন্দু (x_1, y_1) এবং অক্ষরেখা X অক্ষের সমান্তরাল হলে সমীকরণ, $(y-y_1)^2 = 4a(x-x_1)$



(iv) শীর্ষবিন্দু (x_1, y_1) এবং অক্ষরেখা Y অক্ষের সমান্তরাল হলে সমীকরণ, $(x-x_1)^2 = 4b(y-y_1)$

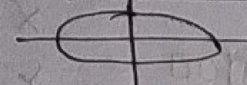
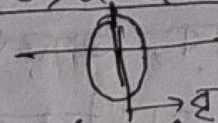


(v) X অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ বিশিষ্ট যেকোন পরাবৃত্তের সমীকরণ, $x = ay^2 + by + c$; $a \neq 0$

(vi) Y অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ বিশিষ্ট যেকোন পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$

10. $y = mx + c$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, $c = \frac{a}{m}$ হবে এবং স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ হবে।

11. উপবৃত্তের প্রমিত (আদর্শ) সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

	a>b হলে	b>a হলে
(i) চিত্র:		
(ii) কেন্দ্র:	$(0,0)$	$(0,0)$
(iii) বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য:	$2a$	$2b$
(iv) ক্ষুদ্র " :	$2b$	$2a$
(v) উৎকেন্দ্রিকতা:	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$
(vi) উপকেন্দ্র:	$(\pm ae,0)$	$(0,\pm be)$
(vii) শীর্ষবিন্দু:	$(\pm a,0)$	$(0,\pm b)$
(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য:	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(ix) নিয়ামকের সমীকরণ:	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$
(x) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ,	$x=\pm ae$	$y=\pm be$
(xi) বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ,	$y=0$	$x=0$
(xii) ক্ষুদ্র "	$x=0$	$y=0$

12. উপবৃত্তের কেন্দ্র (h,k) এবং বৃহৎ অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, (a>b)$

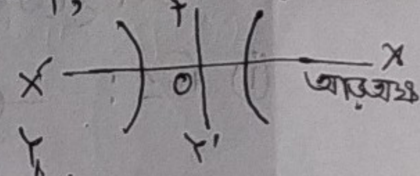
13. $y=mx+c$ রেখাটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $c^2=a^2m^2+b^2$ হয়।

14. $lx+my+n=0$ রেখাটি উপবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $l^2a^2+m^2b^2=n^2$ হয়

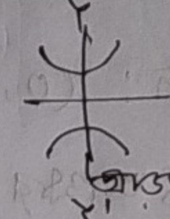
15. (x_1,y_1) বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের বাইরে, উপরে, ভিতরে থাকবে যদি $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1>0/=0/<0$ হয়।

16. (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

17. অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, যখন আড়অক্ষ X অক্ষ বরাবর থাকে,



আবার, আড়অক্ষ Y অক্ষ বরাবর হলে সমীকরণ, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$;



18. উৎকেন্দ্রিকতা: $(e>1)$

(i) আড় অক্ষ X অক্ষ বরাবর থাকলে, $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

(ii) " Y " " " $e=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$

19. অন্যান্য সকল সূত্র উপবৃত্তের অনুরূপ হবে।

(i) আড় অক্ষ X অক্ষ বরাবর অর্থাৎ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণের ক্ষেত্রে $a>b$ এর জন্য উপবৃত্তের সূত্র প্রযোজ্য।

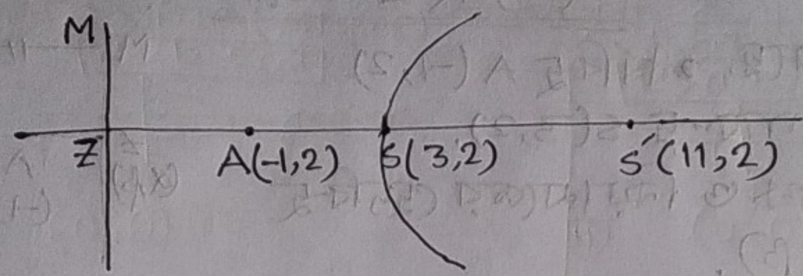
(ii) আড় অক্ষ Y অক্ষ অর্থাৎ $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ সমী. ক্ষেত্রে $b>a$ এর জন্য উপবৃত্তের সূত্র প্রযোজ্য।

20. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ / $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ অধিবৃত্তের অসীমতট রেখার সমীকরণ, $y=\pm\frac{b}{a}x$.

21. অধিবৃত্তস্থ বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ এবং পরামিতিক সমীকরণ, $x=a\sec\theta$, $y=b\tan\theta$.
θ = উৎকেন্দ্রিক কোণ.

22. উপবৃত্তস্থ বিন্দুর পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ এবং সমীকরণ, $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$.

১.



ক) $y^2 - 2x^2 = 2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?

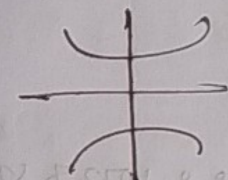
খ) A কে শীর্ষবিন্দু এবং S উপকেন্দ্র হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

গ) S ও S' উপকেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 16.

সমাধানঃ

১(ক) নং উত্তর

প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ,



$$y^2 - 2x^2 = 2$$

$$\text{বা, } \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{1} = 1,$$

ইহাকে $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ অধিবৃত্তের সাথে তুলনা করে পাই, $b^2 = 2$, $a^2 = 1$ এবং এর আড় অক্ষ Y অক্ষ বরাবর অবস্থিত,

$$\therefore \text{ উৎকেন্দ্রিকতা, } e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

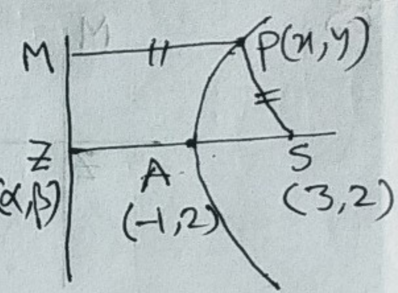
$$= \sqrt{1 + \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ans. $e = \sqrt{\frac{3}{2}}$

রেলওয়ে পাবলিক স্কুল ও কলেজ চট্টগ্রাম

৭(খ) নং প্রঃ উত্তর



দেওয়া আছে, শীর্ষবিন্দু $A(-1, 2)$
এবং উপকেন্দ্র $S(3, 2)$.
ধরি, অক্ষ ও নিয়ামকের ছেদবিন্দু $Z(\alpha, \beta)$,

$\because$ A, ZS এর মধ্যবিন্দু.

$\therefore -1 = \frac{\alpha+3}{2}$ এবং $2 = \frac{\beta+2}{2}$

বা, $\alpha = -5$ বা, $\beta = 2$

$\therefore$ Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-5, 2)$,

পরাবৃত্তের অক্ষ AS রেখার সমীকরণ, $\frac{x+1}{-1-3} = \frac{y-2}{2-2}$

বা, $\frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{0}$

$\therefore y-2=0$

$\because$ অক্ষ ও নিয়ামক পরস্পর লম্ব।

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $x+K=0$, যা $Z(-5,2)$ বিন্দুগামী। $\therefore -5+K=0$ বা, $K=5$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ, $x+5=0$.

এখন, পরাবৃত্তের উপরস্থ বিন্দু $P(x,y)$ হলে, সংজ্ঞামতে,

$SP = PM$

বা, $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = \frac{|x+5|}{\sqrt{1}}$

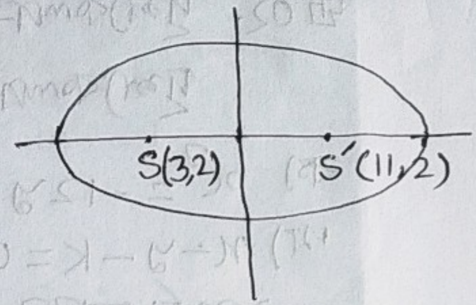
বা, $(x-3)^2+(y-2)^2 = (x+5)^2$

বা, $x^2-6x+9+y^2-4y+4-x^2-10x-25=0$

$\therefore y^2-4y-16x-12=0$

ইহাই নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ, Ans.

৭(গ) নং প্র. উত্তর



দেওয়া আছে, উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $S(3,2)$ এবং $S'(11,2)$

এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a = 16$

$\therefore a = 8.$

এখন, উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব, $2ae = \sqrt{(11-3)^2 + (2-2)^2}$

বা, $2ae = 8$

বা, $ae = 4$

বা, $a^2e^2 = 16$

বা, $a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 16$

বা, $a^2 - b^2 = 16$

বা, $64 - b^2 = 16$

বা, $b^2 = 48$

কেপজ পাবলিক স্কুল ও কলেজ চট্টগ্রাম

উপবৃত্তের কেন্দ্র SS' এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3+11}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$ বা, $(7, 2) = (h,k)$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

বা, $$\frac{(x-7)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{48} = 1$$

ইহাই উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

প্র 02. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

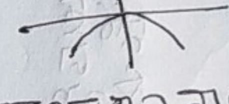
দৃশ্যকল্প-2: $4x^2-5y^2-16x+10y-9=0$

ক) $x^2=-12y$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ) $x-y-K=0$ রেখাটি দৃশ্যকল্প 01 এ বর্ণিত কণিকটিকে স্পর্শ করলে K এর মান ও স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

গ) দৃশ্যকল্প ২ এ বর্ণিত কণিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ২(ক) নং উত্তর



দেওয়া আছে, $x^2=-12y=-4.3.y$

ইহাকে $x^2=-4by$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$b=3$.

∴ নিয়ামকের সমীকরণ, $y=b$

বা, $y=3$

∴ $y-3=0$ Ans.

২(খ) নং উত্তর

দেওয়া আছে, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ——(i)

এবং প্রদত্ত রেখা, $x-y-K=0$ ——(ii)

(i) নং উপবৃত্তকে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a^2=16$, $b^2=9$

(ii) নং রেখাকে $lx+my+n=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $l=1$, $m=-1$, $n=-K$

(i) ও (ii) পরস্পরকে স্পর্শ করলে, $l^2a^2+m^2b^2=n^2$ হবে।

বা, $(4)^2 16 + (-1)^2 . 9 = (-K)^2$

বা, $16 + 9 = K^2$

বা, $K^2 = 25$

$\therefore K = \pm 5$

(ii) নং এ হতে পাই, $y = x - K$ —(iii)

(i) নং এ $y = x - K$ বসিয়ে,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(x-K)^2}{9} = 1$$

বা, $9x^2 + 16(x \pm 5)^2 = 144$

বা, $9x^2 + 16(x^2 \pm 10x + 25) - 144 = 0$

বা, $25x^2 \pm 160x \pm 400 - 144 = 0$

বা, $25x^2 \pm 160x + 256 = 0$

বা, $(5x)^2 \pm 2.5x.16 + (16)^2 = 0$

বা, $(5x \pm 16)^2 = 0$

বা, $5x \pm 16 = 0$

বা, $5x = \pm 16$

$\therefore x = \frac{\pm 16}{5} = \frac{16}{5}$, যখন $K = +5$

$= -\frac{16}{5}$ যখন $K = -5$

(iii) নং হতে, $y = \frac{16}{5} - 5 = -\frac{9}{5}$

$y = -\frac{16}{5} + 5 = \frac{9}{5}$

∴ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\pm \frac{16}{5}, \mp \frac{9}{5}\right)$ Ans.

২(গ) নং উত্তর

প্রদত্ত কনিকের সমীকরণ,

$$4x^2-5y^2-16x+10y-9=0 \quad \text{--- (i)}$$ ইহাকে

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=4, h=0, b=-5$.

$\therefore ab-h^2 = 4(-5)-0=-20<0,$

$\therefore$ প্রদত্ত কনিকটি একটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

(i) নং হতে পাই,

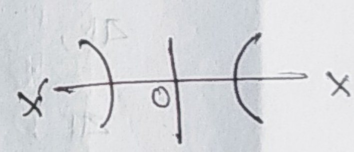
$4x^2-16x-5y^2+10y=9$

বা, $4(x^2-4x)-5(y^2-2y)=9$

বা, $4(x^2-4x+4)-5(y^2-2y+1)=9+16-5$

বা, $4(x-2)^2-5(y-1)^2=20$

বা, $\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$



$\therefore \dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$, যেখানে, $X=x-2$, $Y=y-1$, $a=\sqrt{5}$, $b=2$ এবং আড় অক্ষটি X অক্ষ বরাবর অবস্থিত।

(i) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2.2^2}{\sqrt{5}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$.

(ii) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $X=\pm ae$ --- (ii)

এখন, $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{4}{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ (ii) নং হতে, $X=\pm ae$

বা, $x-2=\pm\sqrt{5}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

বা, $x-2=\pm 3$

(+) ধরে, $x-2=3$ বা, $x-5=0$,

(−) ধরে, $x-2=-3$ বা $x+1=0$.

Ans: $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$, $x-5=0$ এবং $x+1=0$