প্র ০৪. দৃশ্যকল্প: ০১: $y = 3x - 6x^2 + 10x^3 - \dots \infty$

দৃশ্যকল্প ০২: $A = (a + 3x)^n$

ক) $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে 6 তম পদ বের কর।

খ) দৃশ্যকল্প ০১ হতে x কে y এর ঊর্ধ্বক্রমে প্রকাশ কর।

গ) A এর বিস্তৃতিতে ১ম তিনটি পদ যথাক্রমে $b, \frac{21}{2}bx, \frac{189}{4}bx^2$ হলে a, b, n এর মান বের কর।

সমাধান: 4(ক) নং উত্তর

প্রদত্ত রাশি $= \left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$

রাশিটির বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_r (2x)^{12-r} \cdot \left(-\frac{1}{4x^2}\right)^r$

$= {}^{12}C_r \cdot 2^{12-r} \cdot x^{12-r} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^r \cdot \frac{1}{x^{2r}}$

$= {}^{12}C_r \cdot 2^{12-r} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^r \cdot x^{12-3r}$

$\therefore$ 6 তম বা $(5+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_5 \cdot 2^{12-5} \left(-\frac{1}{4}\right)^5 \cdot x^{12-15}$

$= {}^{12}C_5 \cdot 2^7 \left(-\frac{1}{4^5}\right) \cdot x^{-3}$

$= -{}^{12}C_5 \cdot 2^7 \cdot \frac{1}{2^{10}} \cdot x^{-3}$

$= -{}^{12}C_5 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{x^3}$

$= -\frac{792}{8x^3}$

$= -\frac{99}{x^3}$ Ans.

৪(খ) নং উত্তর

দৃশ্যকল্প ০১ হতে পাই,

$$y = 3x - 6x^2 + 10x^3 - \cdots\cdots\infty$$

বা, $-y = -3x + 6x^2 - 10x^3 + \cdots\cdots\infty$ [(-1) দ্বারা গুণ]

বা, $1 - y = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \cdots\cdots\infty$

বা, $1 - y = (1+x)^{-3}$

বা, $1 - y = \frac{1}{(1+x)^3}$

বা, $(1+x)^3 = \frac{1}{1-y}$

বা, $1 + x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-y}}$

বা, $1 + x = (1-y)^{-\frac{1}{3}}$

বা, $1 + x = 1 + (-\frac{1}{3})(-y) + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)}{2!}(-y)^2 + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)}{3!}(-y)^3 + \cdots\cdots\infty$

বা, $1 + x = 1 + \frac{1}{3}y + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}}{2}y^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}}{6}y^3 + \cdots\infty$

বা, $x = \frac{1}{3}y + \frac{4}{9\cdot 2}y^2 + \frac{4\cdot 7}{27\cdot 6}y^3 + \cdots\cdots\infty$

বা, $x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{9}y^2 + \frac{14}{81}y^3 + \cdots\cdots\infty$

$\therefore x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{9}y^2 + \frac{14}{81}y^3 + \cdots\cdots\infty$, ইহাই y এর ~~উর্ধ~~ ঘাতের উর্ধ্বক্রম।

৪(গ) নং উত্তর

দৃশ্যকল্প ০২ হতে, $A = (a+3x)^n$

$$= a^n + {}^nC_1 a^{n-1}(3x) + {}^nC_2 a^{n-2}(3x)^2 + \cdots$$

$$= a^n + n.\frac{a^n}{a}.3x + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{a^n}{a^2}.9x^2 + \cdots$$

শর্তমতে, $b = a^n$ —— (i)

$$\frac{21}{2}bx = n.\frac{a^n}{a}.3x$$

বা, $\frac{7}{2}b = n.\frac{a^n}{a}$ [3x দ্বারা ভাগ]

বা, $\frac{7}{2} = \frac{n}{a}$ [(i) নং হতে, $b = a^n$]

বা, $a = \frac{2n}{7}$ —— (ii)

এবং $\frac{189bx^2}{4} = \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{a^n}{a^2}.9x^2$

বা, $\frac{21}{4}b = \frac{n(n-1)}{2}.\frac{a^n}{a^2}$ [$9x^2$ দ্বারা ভাগ]

বা, $\frac{21}{4}.a^n = \frac{n(n-1)}{2}.\frac{a^n}{a^2}$ [(i) নং]

বা, $\frac{21}{2} = n(n-1).\frac{1}{a^2}$ বা, $21a^2 = 2n(n-1)$

বা, $21.\frac{4n^2}{49} = 2n(n-1)$ [(ii) নং হতে]

বা, $12n^2 = 14n(n-1)$ বা, $6n = 7(n-1)$ [2n দ্বারা ভাগ]

বা, $7n - 6n = 7$ বা, $n = 7$.

(ii) নং হতে, $a = \frac{2.7}{7} = 2$

(i) নং হতে, $b = 2^7 = 128$

Ans. $a = 2$, $b = 128$, $n = 7$

প্রঃ ০৫. $P(x) = 1 + ax + bx^2$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ ধারাটির অভিসৃতি নির্ণয় কর।

খ) $a = 9, b = 20$ হলে $\frac{x}{P(x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ বের কর এবং তা হতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর।

গ) $a = 1, b = 0$ হলে $\{P(x)\}^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের সহগের অনুপাত $1:7:42$ হয়, তবে n এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $n \in N$.

সমাধান: ৫(ক) নং প্রশ্নের উত্তর

প্রদত্ত ধারা, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

$\therefore$ ধারাটির n তম পদ, $U_n = \frac{1}{1+n^2}$

$\therefore$ " $(n+1)$ তম পদ, $U_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)^2}$

$= \frac{1}{1+n^2+2n+1}$

$= \frac{1}{2+2n+n^2}$

D'Alembert অনুপাত পরীক্ষা অনুসারে,

$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2+2n+n^2}}{\frac{1}{1+n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{2+2n+n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\frac{1}{n^2}+1)}{n^2(\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n}+1)}$

$= \frac{1}{1} = 1 \not< 1$

$\therefore$ ধারাটি অভিসৃত নয়।

৫(খ) নং উত্তর

উদ্দীপক অনুসারে, $P(x) = 1 + ax + bx^2$

$a = 9,\ b = 20$ হলে $P(x) = 1 + 9x + 20x^2$

$= 1 + 4x + 5x + 20x^2$

$= 1(1+4x) + 5x(1+4x)$

$= (1+4x)(1+5x)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{x}{P(x)} = \dfrac{x}{(1+4x)(1+5x)}$

ধরি, $\dfrac{x}{(1+4x)(1+5x)} = \dfrac{A}{1+4x} + \dfrac{B}{1+5x}$ ——— (i)

cover-up নিয়মে, $x = -\frac{1}{4}$ হলে, $A = \dfrac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{4}} = \dfrac{-1}{4-5}$

$= 1$

আবার, $x = -\frac{1}{5}$ হলে, $B = \dfrac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \dfrac{-1}{5-4}$

$= -1$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই,

$\dfrac{x}{(1+4x)(1+5x)} = \dfrac{1}{1+4x} - \dfrac{1}{1+5x}$

$= (1+4x)^{-1} - (1+5x)^{-1}$

$= \{1 - 4x + 4^2x^2 - \cdots\cdots + (-1)^n 4^n x^n + \cdots \infty\}$

$- \{1 - 5x + 5^2x^2 - \cdots + (-1)^n 5^n x^n + \cdots \infty$

$\therefore x^n$ এর সহগ $= (-1)^n 4^n - (-1)^n 5^n = (-1)^n(4^n - 5^n)$

$\therefore x^n$ " " $= (-1)^n(4^n - 5^n)$

এবং x^{10} " " $= (-1)^{10}(4^{10} - 5^{10}) = 4^{10} - 5^{10}$

Ans

৫(গ) নং উত্তর

উদ্দীপক অনুসারে, $P(x) = 1 + ax + bx^2$

$a = 1, b = 0$ হলে $P(x) = 1 + x$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \{P(x)\}^n = (1+x)^n$

$(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^nC_r x^r$

$\therefore$ $(r+1)$ তম পদের সহগ $= {}^nC_r$

$(r+2)$ " " " $= {}^nC_{r+1}$

এবং $(r+3)$ " " " $= {}^nC_{r+2}$

শর্তমতে, ${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1 : 7 : 42$

অর্থাৎ, ${}^nC_r : {}^nC_{r+1} = 1 : 7$

বা, $\dfrac{n!}{r!(n-r)!} : \dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = \dfrac{1}{7}$

বা, $\dfrac{(r+1)!(n-r-1)!}{r!(n-r)!} = \dfrac{1}{7}$

বা, $\dfrac{(r+1)r!(n-r-1)!}{r!(n-r)(n-r-1)!} = \dfrac{1}{7}$ $[\because n! = n(n-1)!]$

বা, $\dfrac{r+1}{n-r} = \dfrac{1}{7}$

বা, $n - r = 7r + 7$

বা, $n = 8r + 7$ —— (1)

আবার, ${}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 7 : 42$

বা, $\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} : \dfrac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!} = \dfrac{7}{42}$

বা, $\frac{(r+2)!\,(n-r-2)!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} = \frac{1}{6}$

বা, $\frac{(r+2)(r+1)!\,(n-r-2)!}{(r+1)!\,(n-r-1)(n-r-2)!} = \frac{1}{6}$

বা, $\frac{r+2}{n-r-1} = \frac{1}{6}$

বা, $n-r-1 = 6r+12$

বা, $8r+7-r-1 = 6r+12$ [(1) নং হতে]

বা, $7r-6r = 12-7+1$

বা, $r = 6$

(1) নং এ r এর মান বসিয়ে,

$n = 8\cdot6+7$

$= 55$

Ans. $n = 55$.

বিধান দত্ত
সহকারী অধ্যাপক, গণিত
বেপজা পাবলিক স্কুল ও কলেজ,
চট্টগ্রাম ইপিজেড।
01819326178.