

বোজা দাবলিক স্কুল ও কলেজ, সিইনিজেড

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

অধ্যায়: ৫ (বিশদীকৃতি)

:: পাঠ দারিকল্পনা ০৬ অনুসারে সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান ::

উদ্দেশ্যনাথ : বিধান দত্ত, সহকারী অধ্যাপক, গণিত.

প্র ০১. $A = (2x - \frac{1}{4x^2})^{12}$ এবং $B = (a + bx)^n$ দুইটি

বিশদীকৃত।

ক) $(2 - x^2)^5$ কে প্যামকেলের শিখুরের সাহায্যে বিস্তৃত

কর।

খ) A এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় কর।

গ) $a=1, b=-4, n=-\frac{1}{2}$ হলে B এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগকে ব্যাকোর্ডিয়ালে প্রকাশ কর।

সমাধান: ২(ক) নং প্র. উত্তর

প্যামকেলের শিখুরটি নিম্নরূপ:

$n=0$ হলে

$n=1$ হলে

$n=2$ হলে

$n=3$ হলে

$n=4$ হলে

$n=5$ হলে

$\therefore (2 - x^2)^5$

$$= 1 \cdot 2^5 + 5 \cdot 2^4 (-x^2) + 10 \cdot 2^3 (-x^2)^2 + 10 \cdot 2^2 (-x^2)^3 + 5 \cdot 2 (-x^2)^4 + 1 \cdot (-x^2)^5$$

$$= 32 - 80x^2 + 80x^4 - 40x^6 + 10x^8 - x^{10}$$

Ans

উদাহরণ ২তে, $A = \left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$

A এর বিকৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{12}C_r (2x)^{12-r} \cdot \left(-\frac{1}{4x^2}\right)^r$

$$= {}^{12}C_r \cdot 2^{12-r} \cdot x^{12-r} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^r \cdot \frac{1}{x^{2r}}$$

$$= {}^{12}C_r \cdot 2^{12-r} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^r \cdot x^{12-3r}$$

যদি, এই পদটি x বর্জিত/স্বমুক্ত/স্থবল

তাহলে, $12-3r = 0$ [x এর ঘাত $= 0$]

বা, $3r = 12$

$\therefore r = 4$

$\therefore (4+1)$ বা ৫ তম পদটি x বর্জিত এবং

এর মান $= {}^{12}C_4 \cdot 2^{12-4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^4$

$$= {}^{12}C_4 \cdot 2^8 \cdot \frac{1}{4^4}$$

$$= \frac{(12)!}{4! 8!} \cdot 2^8 \cdot \frac{1}{2^8}$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8!}$$

$$= 495$$

$$\begin{array}{r} 11 \cdot 5 \cdot 9 \\ 99 \cdot 5 + \\ \hline 495 \end{array}$$

Ans. ৫ তম পদটি x বর্জিত এবং এর মান ৪৯৫.

২(গ) নং উত্তর

প্র.০৩

উদ্দীপক অনুসারে, $B = (a+bx)^n$

$a=1, b=-4, n=-\frac{1}{2}$ হলে, $B = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore B$ এর বিকৃতিত $(r+1)$ তম পদ t_{r+1}

$$= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}-r+1) \cdot (-4x)^r}{r!}$$

$$= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\dots(-\frac{2r-1}{2}) \cdot (-4)^r \cdot x^r}{r!}$$

$$= \frac{(-\frac{1}{2})^r \cdot (-4)^r \cdot \{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)\} \cdot x^r}{r!}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^r \cdot \{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (2r-1) \cdot 2r\} \cdot x^r}{r! \cdot \{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2r\}}$$

[সব ও হরকে ভাগ করে
দ্বারা পুনঃ]

$$= \frac{2^r \cdot (2r)! \cdot x^r}{r! \cdot \{2^r \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r)\}}$$

$$= \frac{2^r \cdot (2r)! \cdot x^r}{r! \cdot 2^r \cdot r!}$$

$$= \frac{(2r)! \cdot x^r}{(r!)^2}$$

$\therefore x$ এর সহগ $= \frac{(2r)!}{(r!)^2}$, ইহাই নির্দেশ করে যে

আকার।

Ans. $\frac{(2r)!}{(r!)^2}$

প্র ০২. দৃষ্টকল্প ০২: $(1+3x)^{2n}$; $n \in \mathbb{N}$ একটি ~~বীজগণিতিক~~ বালির

দৃষ্টকল্প ০২: $f(x) = (1 - px + qx^2)$

ক) $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে ২১ তম এবং ২২ তম পদ দুই সমান হলে, x মান কত?

খ) দেখাও যে, দৃষ্টকল্প ০২ এ বর্ণিত বালির মধ্যপদে মান $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 6^n \cdot y^n}{n!} =$

গ) $p=9$ এবং $q=20$ হলে $\frac{1}{f(x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান: ২(ক) নং উত্তর

$(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^{44}C_r x^r$

$\therefore$ ২১ বা $(20+1)$ " " $= {}^{44}C_{20} x^{20}$

এবং ২২ বা $(21+1)$ " " $= {}^{44}C_{21} x^{21}$

অতঃপর,

${}^{44}C_{20} x^{20} = {}^{44}C_{21} x^{21}$

বা, $\frac{44!}{20! 24!} = \frac{44!}{21! 23!} x$

বা, $x = \frac{21! 23!}{20! 24!}$

বা, $x = \frac{21 \cdot 20! 23!}{20! 24 \cdot 23!}$

বা, $x = \frac{21}{24}$

$\therefore x = \frac{7}{8}$

Ans. $x = \frac{7}{8}$

২(খ) নং প্র. উত্তর

দ্বিঘাতকল্পের ০২ হতে পাঠ্য, $(1+3x)^{2n}$; $n \in \mathbb{N}$.

এখানে, $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $2n$ মবদাই একটি জোড়সংখ্যা.

$\therefore$ ধারাটির বিস্তৃতিতে ১টি মবদাদ থাকবে।

এবং মবদাদ $= \left(\frac{2n}{2} + 1\right)$ তম দাদ

$= (n+1)$ তম দাদ

$= {}^{2n}C_n (1)^{2n-n} \cdot (3x)^n$

$= {}^{2n}C_n \cdot 3^n \cdot x^n$

$= \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot 3^n \cdot x^n$

$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (2n-1) \cdot 2n \cdot 3 \cdot x^n}{n!n!}$

$= \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\} \{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n\} 3^n \cdot x^n}{n!n!}$

$= \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\} \{2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)\} 3^n \cdot x^n}{n!n!}$

$= \frac{\{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\} 2^n \cdot n! \cdot 3^n \cdot x^n}{n!n!}$

$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) 6^n \cdot x^n}{n!}$ [সরলীকৃত হবে]

(দেখানো ২য়)

୧(ଗ) ନ. ଓଡ଼ିଆ

ଦିଆଯାଇଛି ଯେ $f(x) = 1 - px + qx^2$

$p = 9, q = 20$ ହେଲେ, $f(x) = 1 - 9x + 20x^2$

$$\therefore \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1 - 9x + 20x^2}$$

$$= \frac{1}{1 - 4x - 5x + 20x^2}$$

$$= \frac{1}{(1 - 4x) - 5x(1 - 4x)}$$

$$= \frac{1}{(1 - 4x)(1 - 5x)}$$

ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{1}{(1 - 4x)(1 - 5x)} = \frac{A}{1 - 4x} + \frac{B}{1 - 5x} \quad \text{--- (1)}$

Cover up ନିୟମ, $A = \frac{1}{1 - 5 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4}{4 - 5} = -4$ [ବାମପାର୍ଶ୍ଵ $(1 - 5x)$ ଏ $1 - 4x = 0$ ବା $x = \frac{1}{4}$ ବସାଇ]

ଅଥବା $B = \frac{1}{1 - 4 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{5}{5 - 4} = 5$ [ବାମପାର୍ଶ୍ଵ $(1 - 4x)$ ଏ $x = \frac{1}{5}$ ବସାଇ]

$$\therefore \frac{1}{f(x)} = \frac{-4}{1 - 4x} + \frac{5}{1 - 5x} \quad \text{[(1) ନ. ୧୭]}$$

$$= \frac{-1}{5(1 - 5x)} - \frac{1}{4(1 - 4x)}$$

$$= 5(1 + 5x + 5^2x^2 + 5^3x^3 + \dots + 5^n x^n + \dots \infty)$$

$$- 4(1 + 4x + 4^2x^2 + \dots + 4^n x^n + \dots \infty)$$

$$\therefore n^{\text{th}} \text{ ସମସ୍ୟା} = 5 \cdot 5^n - 4 \cdot 4^n$$

$$= 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

Ans. $5^{n+1} - 4^{n+1}$

প্র.৯. (i) $(1+4x)^9 (1+\frac{1}{4x})^9$ (ii) $(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$ দুইটি

ত্রিমাত্রিক রাশি,

ক) $(\frac{K}{2} + 2)^8$ এর বিকৃতিত মবীপদ ১১২০ হলে K এর মান কত?

খ) (i) নং এর বিকৃতিত x মুক্ত পদটির মান বের কর।

গ) (ii) নং এর বিকৃতিত সার্বজন পদের সরলীকৃত মান হ'ল x^{10} এর মতগ নির্ণয় কর।

সমাধান:

৩(ক) নং প্রশ্নের উত্তর

প্রদত্ত রাশি $(\frac{K}{2} + 2)^8$, যেখানে $n=8$ (জোড় সংখ্যা)

$\therefore$ মবীপদ $= (\frac{n}{2} + 1)$ বা $(\frac{8}{2} + 1)$ বা $(4+1)$ তম পদ

$$= {}^8C_4 (\frac{K}{2})^{8-4} \cdot 2^4$$

$$= {}^8C_4 \cdot \frac{K^4}{2^4} \cdot 2^4$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} K^4$$

$$= 70K^4$$

অতএব, $70K^4 = 1120$

$$\text{বা, } K^4 = \frac{1120}{70}$$

$$\text{বা, } K^4 = 16$$

$$\therefore K = \pm 2$$

Ans. $K = \pm 2$

Dr Bidhan Dutta,
Assistant professor in math.
BEPZA Public School and College,
CEPZ. Contact: 01819326178

উদ্দীপকের (i) নং হতে দাও,

$$\begin{aligned} \text{সদুপসার্মি} &= (1+4x)^p (1+\frac{1}{4x})^q \\ &= (1+4x)^p \left(\frac{4x+1}{4x}\right)^q \\ &= \frac{(1+4x)^{p+q}}{(4x)^q} = \frac{(1+4x)^{p+q}}{4^q \cdot x^q} \end{aligned}$$

এখন, $(1+4x)^{p+q}$ এর বিকৃতিত $(r+1)$ তম পদ = ${}^{p+q}C_r (4x)^r$

$$\therefore \frac{(1+4x)^{p+q}}{4^q \cdot x^q} \text{ " " " } (r+1) \text{ " " " } = \frac{{}^{p+q}C_r (4x)^r}{4^q \cdot x^q}$$

$$= {}^{p+q}C_r \cdot 4^{r-q} \cdot x^{r-q}$$

বিকৃতি, এই পদটি x মুক্ত,

$$\therefore r-q=0 \quad [x \text{ এর ক্ষেত্রে } =0]$$

$$\text{বা, } r=q$$

$\therefore (q+1)$ তম পদটি x মুক্ত হবে.

$$\text{সুতরাং} = \frac{{}^{p+q}C_q \cdot 4^0 \cdot x^0}{4^q \cdot x^q}$$

$$= \frac{{}^{p+q}C_q}{4^q}$$

$$= \frac{(p+q)!}{q! (p+q-q)!}$$

$$= \frac{(p+q)!}{q! p!}$$

Ans.

উদ্দীপকের (ii) নং দাতা পাঠে, $(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$

$$(1-3x)^{-\frac{1}{2}} \text{ এর বিকৃতিত আধারন পদ } (r+1) \text{ তম পদ}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots\dots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!} (-3x)^r$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\dots\dots(-\frac{2r-1}{2})}{r!} (-3)^r x^r$$

$$= \frac{(-\frac{1}{2})^r (-3)^r (1 \cdot 3 \cdot 5 \dots\dots (2r-1))}{r!} x^r$$

$$= \frac{(\frac{3}{2})^r (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots\dots (2r-1) 2r)}{r! (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots\dots 2r)} x^r$$

$$= \frac{(\frac{3}{2})^r (2r)! x^r}{r! 2^r (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots r)}$$

$$= \frac{(\frac{3}{2})^r (2r)! x^r}{2^r r! r!}$$

$$= \frac{(2r)!}{(r!)^2} \left(\frac{3}{4}\right)^r x^r, \text{ ইহাটি সরলীকৃত আকার}$$

$$\therefore x^r \text{ এর সহগ} = \frac{(2r)!}{(r!)^2} \left(\frac{3}{4}\right)^r$$

$$\therefore x^{10} \text{ এর সহগ} = \frac{(20)!}{(10!)^2} \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

Ans.