বেগজা পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

অধ্যায়: ৮ম (ফাংশন ও তার লেখচিত্র)

পাঠ পরিকল্পনা ০৫ অনুসারে সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্র০১. দুইটি ফাংশন নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত:

$f: R-\{-\frac{1}{2}\} \to R-\{\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

এবং $g: R \to R$, $g(x) = 2x-5$.

ক) $f(-1)$ এবং $g(0)$ নির্ণয় কর। ২

খ) $fog(x) = gof(x)$ কিনা যাচাই কর। ৪

গ) উদ্দীপকে বর্ণিত $f(x)$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন থাকলে তা নির্ণয় কর। ৪

সমাধান:

১(ক) নং প্রশ্নের উত্তর

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$\therefore f(-1) = \frac{-1-3}{2(-1)+1} = \frac{-4}{-1} = 4$

আবার, $g(x) = 2x-5$

$\therefore g(0) = 2.0-5 = -5$

Ans. $f(-1) = 4$, $g(0) = -5$.

১(খ) নং প্র. উত্তর

উদ্দীপক অনুসারে, $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

এবং $g(x) = 2x-5$.

$\therefore fog(x) = f(g(x)) = f(2x-5)$

$= \frac{2x-5-3}{2(2x-5)+1} = \frac{2x-8}{4x-10+1}$

$= \frac{2x-8}{4x-9}$ ——— (1)

আবার, $gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-3}{2x+1}\right)$

$= 2\left(\frac{x-3}{2x+1}\right) - 5$ $[\because g(x) = 2x-5]$

$= \frac{2x-6-10x-5}{2x+1}$

$= \frac{-8x-11}{2x+1}$ ——— (ii)

(i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$fog(x) \neq gof(x)$.

$\therefore$ উদ্দীপকে বর্ণিত $fog(x) = gof(x)$ সত্য নয়। ———

⊞ বেদজা পাবলিক স্কুল ও কলেজ চট্টগ্রাম ⌀

৯(গ) নং প্র. উত্তর

উদ্দীপক অনুসরণে পাই,

$f: \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$.

এখানে, $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $2x+1 \neq 0$ হয়

বা, $2x \neq -1$ হয়

বা, $x \neq -\frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন, $f_D = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

ধরি, $y = f(x)$

বা, $y = \frac{x-3}{2x+1}$

বা, $2xy + y = x - 3$

বা, $2xy - x = -y - 3$

বা, $x(2y-1) = -(y+3)$

বা, $x = \frac{-(y+3)}{2y-1}$

বা, $x = \frac{y+3}{1-2y}$, ——— ①

∴ x বাস্তব হবে অর্থাৎ সংজ্ঞায়িত হবে যদি,
$1-2y \neq 0$ হয় বা, $y \neq \frac{1}{2}$ হয়,

∴ রেঞ্জ, $f_R = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} :=$ co-domain of $f(x)$.

∴ ফাংশনটি সার্বিক।

* এখন, $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি $x_1, x_2 \in D_f$ এবং $f(x_1) = f(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

$f(x_1) = f(x_2)$

বা, $\frac{x_1-3}{2x_1+1} = \frac{x_2-3}{2x_2+1}$

বা, $2x_1x_2 + x_1 - 6x_2 - 3 = 2x_1x_2 + x_2 - 6x_1 - 3$

বা, $2x_1x_2 + x_1 - 6x_2 - 3 - 2x_1x_2 - x_2 + 6x_1 + 3 = 0$

বা, $7x_1 - 7x_2 = 0$

বা, $7x_1 = 7x_2$

বা, $x_1 = x_2$

∴ $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

* যেহেতু ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক, সেহেতু $f(x)$ এর বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান।

① নং হতে পাই, $x = \frac{y+3}{1-2y}$

x এর স্থলে $f^{-1}(x)$ এবং y এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-2x}$

Ans. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-2x}$.

[Note: কোন ফাংশন এক-এক ও সার্বিক হলে উক্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন থাকবে অন্যথায়, ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন সংজ্ঞায়িত নয়।]

প্র 02. ফাংশন গুলো লক্ষ্য কর:
$f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = |2x|$ এবং $h(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$

ক) $y = \sqrt{9-x^2}$ এর ডোমেন বাস্তব সংখ্যারেখায় দেখাও.

খ) $hof : \mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{2\}$ ফাংশনটি এক-এক ও আবির্ভ কিনা যাচাই পূর্বক $(hof)^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

গ) $g(x)$ এর লেখচিত্র হতে রূপান্তরিত ফাংশন $g((f(x))^2) + 2$ এর স্কেচ অংকন কর।

ওকলেজ টিউশনের বোর্ডের বাস্তবিক সূত্র

সমাধান:

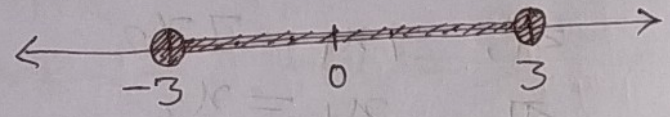
2(ক) নং প্র. উত্তর

দেওয়াআছে, $y = \sqrt{9-x^2}$

ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি
$9-x^2 \geq 0$ হয় বা $-x^2 \geq -9$ বা, $x^2 \leq 9$
বা, $|x|^2 \leq 9$ বা, $|x| \leq 3$ বা, $-3 \leq x \leq 3$ হয়

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 3\}$.

সংখ্যারেখা:



2(খ) নং প্র. উত্তর

উদ্দীপক অনুসারে পাই, $f(x) = \sqrt{x-3}$ এবং $h(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$

$\therefore hof = h(f(x)) = h(\sqrt{x-3}) = \frac{2(\sqrt{x-3})^2-1}{(\sqrt{x-3})^2}$

$= \frac{2(x-3)-1}{x-3} = \frac{2x-7}{x-3}$

$\therefore hof : \mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{2\}$, $hof = \frac{2x-7}{x-3}$

এখন, hof এক-এক ফাংশন হবে যদি ও কেবল যদি $x_1, x_2 \in$ ডোম hof এবং $hof(x_1) = hof(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

$\therefore hof(x_1) = hof(x_2)$ হলে,

$\frac{2x_1-7}{x_1-3} = \frac{2x_2-7}{x_2-3}$ বা, $(2x_1-7)(x_2-3) = (2x_2-7)(x_1-3)$

বা, $2x_1x_2 - 6x_1 - 7x_2 + 21 = 2x_1x_2 - 6x_2 - 7x_1 + 21$

বা, $-6x_1 + 7x_1 = -6x_2 + 7x_2$ [Note: কাটাকাটি করার দরকার নেই]

বা, $x_1 = x_2$

$\therefore hof$ ফাংশনটি এক-এক।

আবার, ধরি, $y = hof = \frac{2x-7}{x-3}$

বা, $xy - 3y = 2x - 7$

বা, $xy - 2x = 3y - 7$

বা, $x(y-2) = 3y - 7$

$\therefore x = \frac{3y-7}{y-2}$ ——— ①

x বাস্তব হবে যদি ও কেবল যদি $y-2 \neq 0$ হয়

বা, $y \neq 2$ হয়

$\therefore$ রেঞ্জ$(hof) = \mathbb{R} - \{2\}$ = co-domain of (hof)

$\therefore hof$ একটি সার্বিক ফাংশন।

যেহেতু hof একটি এক-এক ও সার্বিক ফাংশন

$\therefore hof$ এর বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান।

এখন, ① নং হতে পাই,

$x = \frac{3y-7}{y-2}$

x এর স্থলে $(hof)^{-1}(x)$ এবং y এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$(hof)^{-1}(x) = \frac{3x-7}{x-2}$

Ans. $(hof)^{-1}(x) = \frac{3x-7}{x-2}$.

● সমাজিক দূরত্ব, সরকার কর্তৃক ঘোষিত ছুটির দিন ও বিধান মেনে ● প্রয়োজনে সামাজিক দূরত্ব ও করোনা ছুটিকালীন ●

2(গ) নং প্র. উত্তর

ধরি, $y = g(x) = |2x|$

আবার, $y = g((f(x))^2) + 2$

$= g((\sqrt{x-3})^2) + 2$ [$\because f(x) = \sqrt{x-3}$

$= g(x-3) + 2$

$= |2(x-3)| + 2$

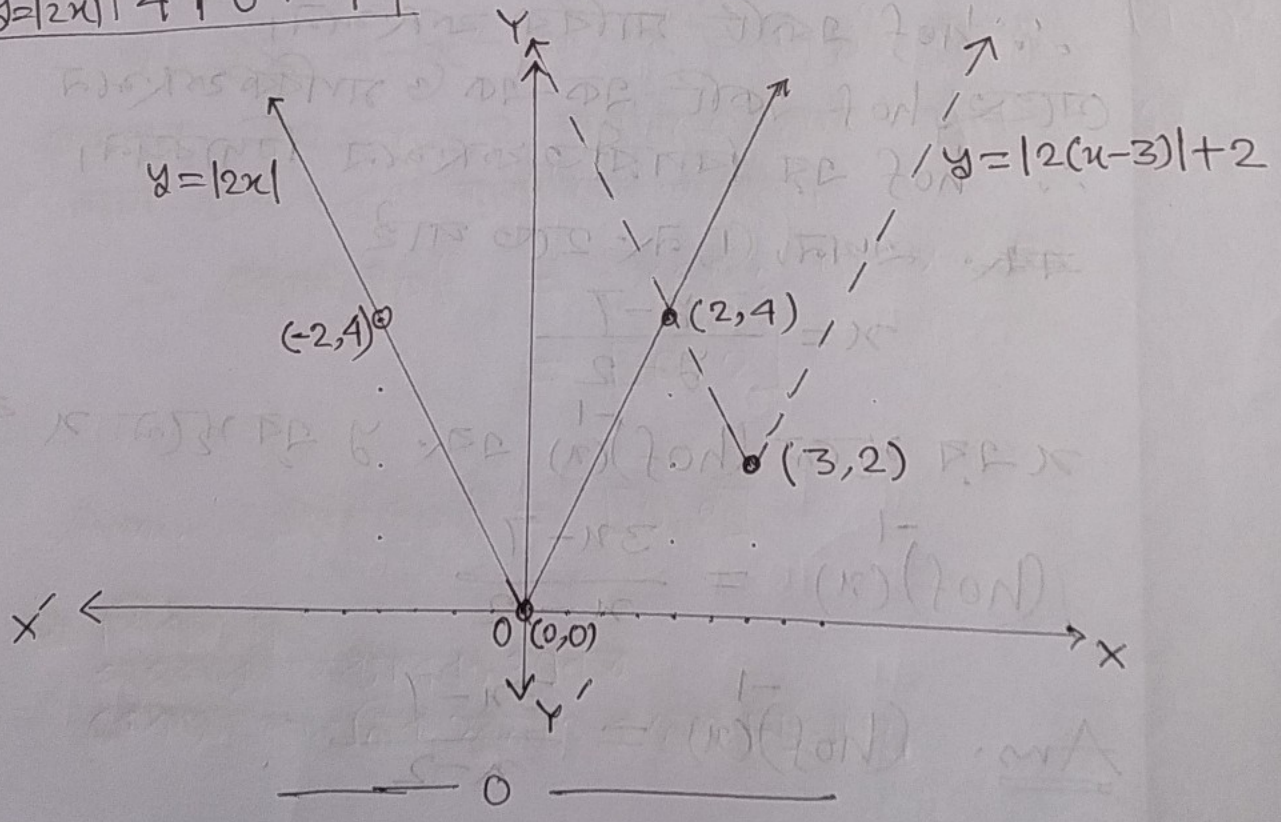
$= |2x-6| + 2$

$\therefore 2x-6=0$ বা $x=3$ হলে $y=2$

$\therefore y=|2x|$ এর লেখচিত্রকে 3 একক ডানে এবং 2 একক উপরে [অর্থাৎ, মূলবিন্দুকে (0,0) কে (3, 2) বিন্দুতে স্থানান্তর] স্থানান্তরিত করলে $y=|2x-6|+2$ এর স্কেচ পাওয়া যায়।

এখন, x এর বিভিন্ন মানের জন্য $y=|2x|$ এর লেখ হতে প্রাপ্ত $y=|2(x-3)|+2$ এর স্কেচ আঁকা হল:

x	-2	0	+2
$y=\|2x\|$	4	0	4



বিদ্যালয় কারিকুলাম ও কলেজ কারিকুলাম

৩. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2+1$ এবং $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt{5-x}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

ক) $\frac{1}{g(x)}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

খ) $f^{-1}([10, 26])$ নির্ণয় করে সংখ্যারেখায় দেখাও।

গ) $(g \circ f)$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান:

৩(ক) নং প্র. উত্তর

উদ্দীপক হতে পাই, $g(x) = \sqrt{5-x}$

ধরি, $y = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$

$\therefore$ y বাস্তব হবে যদি ও কেবল যদি $5-x > 0$ হয়,

বা, $-x > -5$ হয়।

$\therefore x < 5$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন, $\frac{1}{g(x)} = \{x \in \mathbb{R}: x < 5\}$

Ans. $\{x \in \mathbb{R}: x < 5\}$

৩(খ) নং প্রশ্নের উত্তর

দেওয়া আছে, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2+1$

ধরি, $z = f^{-1}([10, 26])$

বা, $f(z) = [10, 26]$

$\therefore$ বদ্ধ ব্যবধির সংজ্ঞানুসারে পাই,

$10 \le f(z) \le 26$

বা, $10 \le z^2+1 \le 26$ $[\because f(x) = x^2+1]$

বা, $10-1 \le z^2 \le 26-1$

বা, $9 \le z^2 \le 25$

বা, $9 \le |z|^2 \le 25$ $[\because |x|^2 = x^2]$

বা, $9 \le |z|^2 \le 25$

বা, $3 \le |z| \le 5$ বা, $3 \le \pm z \le 5$

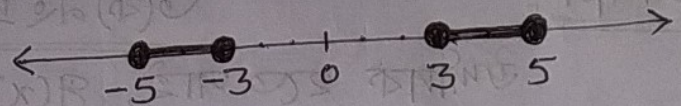
(+) চিহ্ন বিবেচনা করে, $3 \le z \le 5$

(-) " " " ; $3 \le -z \le 5$ বা, $-3 \ge z \ge -5$

$\therefore -5 \le z \le -3$

$\therefore f^{-1}([10, 26]) = [-5, -3] \cup [3, 5]$ Ans.

সংখ্যারেখা:



৩(গ) নং প্র. উত্তর

দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 1$ এবং $g(x) = \sqrt{5-x}$

$\therefore gof = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{5-x^2-1} = \sqrt{4-x^2}$

এখন, gof সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $4-x^2 \ge 0$ হয়

বা, $-x^2 \ge -4$ হয় বা $x^2 \le 4$ হয় বা, $|x|^2 \le 4$ হয়

বা, $|x| \le 2$ হয় বা, $-2 \le x \le 2$ হয়।

$\therefore Dom(gof) = \{x \in R : -2 \le x \le 2\} = [-2, 2]$.

ধরি, $y = gof = \sqrt{4-x^2}$

বা, $y^2 = 4 - x^2$ বা, $x^2 = 4 - y^2$ বা, $x = \sqrt{4-y^2}$

এখানে, $-2 \le x \le 2$ ব্যবধিতে, $gof = \sqrt{4-x^2}$ এর মান $0 \le x \le 2$ ব্যবধিতে থাকে।

$\therefore$ রেঞ্জ $gof = \{x \in R : 0 \le x \le 2\}$

$= [0, 2]$

Ans. রেঞ্জ $gof = [0, 2]$

বিধান দত্ত
সহকারী অধ্যাপক, গণিত
বেপজা পাবলিক স্কুল ও কলেজ চট্টগ্রাম।

প্র ০৪. নিচের ফাংশন গুলো লক্ষ্য কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও: $f(x)=\ln(\sin x)$, $g(x)=\ln(\cos x)$ এবং $\phi(x)=x^2-3x+4$

ক) $\phi\circ\phi(2)$ নির্ণয় কর। ২

খ) দেখাও যে, $e^{2g(a)}-e^{2f(a)}=e^{g(2a)}$ ৪

গ) $y=x^2$ এর লেখচিত্র হতে $\phi(x)$ এর স্কেচ আঁকও এবং বৈশিষ্ট্য লেখ। ৪

বদরুন্নেছা সরকারি কলেজ, ঢাকা

সমাধান:

৪(ক) নং প্র. উত্তর

দেওয়া আছে, $\phi(x)=x^2-3x+4$

$\therefore \phi(2)=2^2-3.2+4$

$=4-6+4$

$=2$

$\therefore \phi\circ\phi(2)=\phi(\phi(2))$

$=\phi(2)$

$=2 \quad [\because \phi(x)=x^2-3x+4]$

Ans. $\phi\circ\phi(2)=2$

৪(খ) নং প্র. উত্তর

উদ্দীপক হতে পাই, $f(x)=\ln(\sin x)$, $g(x)=\ln(\cos x)$.

$\therefore f(a)=\ln(\sin a)$, $g(a)=\ln(\cos a)$

এবং $g(2a)=\ln(\cos 2a)$.

বামপক্ষ $=e^{2g(a)}-e^{2f(a)}=e^{2\ln(\cos a)}-e^{2\ln(\sin a)}$

$=e^{\ln(\cos^2 a)}-e^{\ln(\sin^2 a)}=\cos^2 a-\sin^2 a$

$=\cos 2a.$

$=e^{\ln(\cos 2a)} \quad [\because e^{\ln x}=x]$

$=e^{g(2a)}$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৪(গ)নং প্র.উত্তর

উদাহরণ হতে পাই, $y = x^2$ ——①

এবং $\phi(x) = x^2 - 3x + 4$

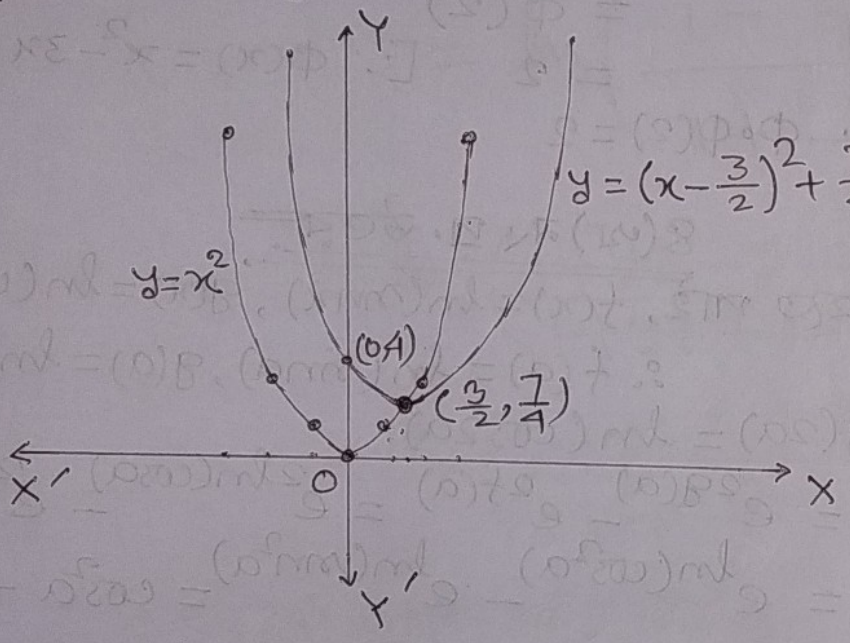
$= x^2 - 2.x.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 4 - \frac{9}{4}$

$= (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{16-9}{4}$

$= (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4}$

এখানে, $x - \frac{3}{2} = 0$ বা $x = \frac{3}{2}$ হলে $\phi(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$

এখন, $y = x^2$ এর লেখচিত্রকে $\frac{3}{2}$ একক ডানে এবং $\frac{7}{4}$ একক উপরে সরালে অর্থাৎ $(0,0)$ বিন্দু অক্ষদ্বয়কে সমান্তরাল রেখে $(0,0)$ বিন্দুকে $(\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$ বিন্দুতে সরালে $\phi(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



বৈশিষ্ট্য :

(i) লেখচিত্রটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

(ii) এর ডোমেন $= \mathbb{R}$, রেঞ্জ $= [\frac{7}{4}, \infty]$

(iii) লেখচিত্রটি Y অক্ষকে $(0,1)$ বিন্দুতে ছেদকরে।

(iv) $x = \frac{3}{2}$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

ও,

০৫. দুইটি ফাংশন নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত:

$f(x) = 3x-1, \quad x>3$
$\quad = x^2-2; \quad 2 \le x \le 3$
$\quad = 2x+3; \quad x<-2$

এবং $g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

বিবিধ দৃষ্টান্ত সমস্যাবলি অনুশীলনী

ক) $g(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ) দেখাও যে, $g(y)+g(z) = g\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$ ৪

গ) $fof(-3)$, $fof(3)$, $f(-1)$ নির্ণয় কর। ৪

সমাধান:

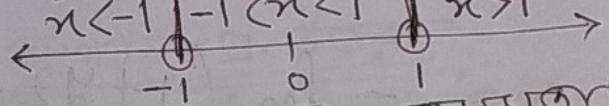
৫(ক) নং প্র. উত্তর

উদ্দীপক হতে পাই, $g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$g(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $\frac{1-x}{1+x} > 0$ হয়

বা, $\frac{x-1}{x+1} < 0$ হয়, [-1 দ্বারা গুন] ①

① নং অসমতাটি সত্য হবে যদি $(x-1)$ ও $(x+1)$ উৎপাদক দুইটির একটি ঋনাত্মক ও অপরটি ধনাত্মক হয়।

লক্ষ্য করি, 

এখানে, $-1<x<1$ হলে ① নং অসমতাটি সত্য হয়।

$\therefore$ ডোমেন $g(x) = \{x \in \mathbb{R} : -1<x<1\}$
$\quad = (-1,1)$.

Ans. $(-1,1)$

৫(খ) নং প্র. উত্তর

উদ্দীপক অনুসারে, $g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$\therefore g(y) = \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$

$g(z) = \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$

এখন, বামপক্ষ $= g(y) + g(z)$

$$= \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) + \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{1-z}{1+z}\right)$$

$$= \ln \frac{1-y-z+yz}{1+y+z+yz} \quad \text{---(i)}$$

আবার, ডানপক্ষ $= g\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$

$$= \ln\left(\frac{1-\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{y+z}{1+yz}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1-y-z+yz}{1+y+z+yz}\right) \quad \text{---(ii)}$$

$\therefore$ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ $g(y) + g(z) = g\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$

(প্রমাণিত)

৫(গ) নং প্র. উত্তর

উদ্দীপক অনুসারে, $f(x) = 3x-1 \; ; \; x>3$
$= x^2-2 \; ; \; 2 \le x \le 3$
$= 2x+3 \; ; \; x<-2$

$x=-3$ হলে $f(x) = 2x+3$ $[\because x<-2]$
$\therefore f(-3) = 2(-3)+3 = -3$

$\therefore fof(-3) = f(f(-3))$
$= f(-3)$
$= -3.$

$x=3$ হলে $f(x) = x^2-2$ $[2 \le x \le 3]$
$\therefore f(3) = 3^2-2$
$= 7$

$\therefore fof(3) = f(f(3))$
$= f(7)$
$= 3.(7)-1$ $[\because 7>3, \text{ বলে } f(x)=3x-1]$
$= 21-1$
$= 20.$

আবার, $x=-1>-2$ এর জন্য $f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore f(-1)$ অনির্ণেয়/অসংজ্ঞায়িত।

———— ৩.

বিবান দত্ত
সহকারী অধ্যাপক, গণিত
বেদজা পাবলিক স্কুল ও কলেজ চট্টগ্রাম।
01819326178