অধ্যায়: ৭ম (বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ)

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান (পাঠ পরি: ০৩)

১। $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ দুইটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।

ক) $\sin\cos^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{y}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $f(\pi g(\theta)) = g(\pi(f(\theta)))$ হলে দেখাও, $\theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

গ) সাধারণ সমাধান কর: $f(x) + g(x) = f(2x) + g(2x)$

সমাধান:

১(ক) নং উত্তর

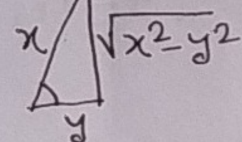
প্রদত্ত রাশি $= \sin\cos^{-1}\tan\cos^{-1}\frac{y}{x}$

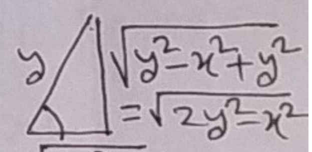
$= \sin\cos^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

$= \sin\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

$= \sin\sin^{-1}\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

$= \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$ **Ans.**





১(খ) নং উত্তর

উদ্দীপক হতে পাই, $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

$\therefore f(\theta) = \cos\theta$, $g(\theta) = \sin\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(\pi(g(\theta))) = g(\pi(f(\theta)))$

বা, $f(\pi\sin\theta) = g(\pi\cos\theta)$

বা, $\cos(\pi\sin\theta) = \sin(\pi\cos\theta)$

(অ.পৃ.দ্র)

বা, $\sin(\pi\cos\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right)$ $\left[\because \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)\right]$

বা, $\pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} \pm \sin\theta$

বা, $\cos\theta \mp \sin\theta = \frac{1}{2}$ বা, $(\cos\theta \mp \sin\theta)^2 = \frac{1}{4}$

বা, $\cos^2\theta \mp 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\mp\sin 2\theta + 1 = \frac{1}{4}$

বা, $\mp\sin 2\theta = \frac{1}{4} - 1$ বা, $\mp\sin 2\theta = -\frac{3}{4}$

বা, $\pm\sin 2\theta = \frac{3}{4}$ বা, $\sin 2\theta = \pm\frac{3}{4}$

বা, $2\theta = \pm\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$\therefore \theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (প্রমাণিত)

২ নং (গ) প্র. উত্তর

উদ্দীপক অনুসারে, $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

$\therefore f(2x) = \cos 2x$, $g(2x) = \sin 2x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(x) + g(x) = f(2x) + g(2x)$

বা, $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$

বা, $(\cos x - \cos 2x) + (\sin x - \sin 2x) = 0$

বা, $2\sin\frac{x+2x}{2}\sin\frac{2x-x}{2} + 2\cos\frac{x+2x}{2}\sin\frac{x-2x}{2} = 0$

বা, $2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{3x}{2}\sin\left(\frac{-x}{2}\right) = 0$

বা, $2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$ $[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

(অপর পৃ.)

২য়, $\sin\frac{x}{2}=0$ বা, $\frac{x}{2}=n\pi,\ n\in Z$

$\therefore x=2n\pi;\ n\in Z$

অথবা, $\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=0$

বা, $\sin\frac{3x}{2}=\cos\frac{3x}{2}$

বা, $\tan\frac{3x}{2}=1$

বা, $\tan\frac{3x}{2}=\tan\frac{\pi}{4}$

বা, $\frac{3x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{4};\ n\in Z$

$\therefore x=\frac{2}{3}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right);\ n\in Z$

Ans. $x=2n\pi,\ \frac{2}{3}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ যেখানে, $n\in Z$.

কিছু গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি:

Type = 01

১। $\tan^{-1}x\pm\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x\pm y}{1\mp xy}$; যখন $xy<1$ [+ এর সূত্রে]

$=\pi+\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$; $xy>1$

$=\frac{\pi}{2}$; $xy=1$

২। $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

৩। $\sin^{-1}x\pm\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{1-x^2}\}$

৪। $\cos^{-1}x\pm\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy\mp\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$

সমাধান বিষয়ক:

১। $\sin\theta=0$ হলে $\theta=n\pi$, $\tan\theta=0$ হলে $\theta=n\pi$

২। $\cos\theta=0$ হলে $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

৩। $\sin\theta=1$ হলে $\theta=(4n+1)\frac{\pi}{2}$

৪। $\sin\theta=-1$ হলে $\theta=(4n-1)\frac{\pi}{2}$

৫। $\cos\theta=1$ হলে $\theta=2n\pi$

৬। $\cos\theta=-1$ হলে $\theta=(2n+1)\pi$

৭। $\sin\theta=\sin\alpha$ হলে $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$

৮। $\cos\theta=\cos\alpha$ হলে $\theta=2n\pi\pm\alpha$

৯। $\tan\theta=\tan\alpha$ হলে $\theta=n\pi+\alpha$,

সকল সূত্রে $n\in Z$ বলবৎ ~~[illegible]~~ নিযুক্ত হবে।

২। একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হল, $f(x) = \cos x$,

ক) $\sec^2(\tan^{-1}2) + \csc^2(\cot^{-1}3)$ এর মান কত?

খ) সমাধান কর: $\sqrt{2}f(3\theta) - f(\theta) = f(5\theta)$

গ) $f(P) = \frac{r}{s}$, $f(Q) = \frac{m}{n}$ এবং $P+Q = \theta$ হলে, দেখাও যে,

$$\frac{r^2}{s^2} - \frac{2mr\cos\theta}{ns} + \frac{m^2}{n^2} = \sin^2\theta$$

<u>সমাধান:</u>

<u>২(ক) প্র. উ.</u>

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \sec^2(\tan^{-1}2) + \csc^2(\cot^{-1}3)$$
$$= 1 + \tan^2(\tan^{-1}2) + 1 + \cot^2(\cot^{-1}3)$$
$$= 1 + \{\tan(\tan^{-1}2)\}^2 + 1 + \{\cot(\cot^{-1}3)\}^2$$
$$= 1 + (2)^2 + 1 + (3)^2$$
$$= 1 + 4 + 1 + 9 = 15 \text{ Ans.}$$

<u>২(খ) নং প্র. উ.</u>

উদ্দীপক অনুসারে, $f(x) = \cos x$,

$\therefore f(\theta) = \cos\theta$, $f(3\theta) = \cos 3\theta$, $f(5\theta) = \cos 5\theta$.

প্রদত্ত সমীকরণ,

$\sqrt{2}f(3\theta) - f(\theta) = f(5\theta)$ বা, $\sqrt{2}\cos 3\theta - \cos\theta = \cos 5$

বা, $\sqrt{2}\cos 3\theta - (\cos\theta + \cos 5\theta) = 0$ ~~বা, $\sqrt{2}\cos 3\theta$~~.

বা, $\sqrt{2}\cos 3\theta - 2\cos\frac{\theta+5\theta}{2}\cos\frac{\theta-5\theta}{2} = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos 3\theta - 2\cos 3\theta\cos 2\theta = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos 3\theta(1 - \sqrt{2}\cos 2\theta) = 0$

হয় $\cos 3\theta = 0$ বা, $3\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

বা, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{6}; n \in Z$

অথবা, $1 - \sqrt{2}\cos 2\theta = 0$ বা $\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $\cos 2\theta = \cos\frac{\pi}{4}$

বা, $2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ বা, $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{8}, n \in Z$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{6}, n\pi \pm \frac{\pi}{8}$ সকল ক্ষেত্রে $n \in Z$. <u>Ans.</u>

২নং (গ) প্র. উত্তর

উদ্দীপক হতে, $f(x) = \cos x$.

দেওয়া আছে, $f(P) = \frac{r}{s}$ বা $\cos P = \frac{r}{s}$ বা, $P = \cos^{-1}\frac{r}{s}$

$f(Q) = \frac{m}{n}$ বা, $\cos Q = \frac{m}{n}$

বা, $Q = \cos^{-1}\frac{m}{n}$

এবং $P + Q = \theta$

বা, $\cos^{-1}\frac{r}{s} + \cos^{-1}\frac{m}{n} = \theta$

বা, $\cos^{-1}\left\{\frac{r}{s}\cdot\frac{m}{n} - \sqrt{\left(1-\frac{r^2}{s^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)}\right\} = \theta$

বা, $\frac{mr}{ns} - \sqrt{1-\frac{r^2}{s^2}-\frac{m^2}{n^2}+\frac{r^2m^2}{s^2n^2}} = \cos\theta$

বা, $\frac{mr}{ns} - \cos\theta = \sqrt{1-\frac{r^2}{s^2}-\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^2r^2}{n^2s^2}}$

বা, $\left(\frac{mr}{ns} - \cos\theta\right)^2 = \left(\sqrt{1-\frac{r^2}{s^2}-\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^2r^2}{n^2s^2}}\right)^2$

বা, $\frac{m^2r^2}{n^2s^2} - \frac{2mr}{ns}\cos\theta + \cos^2\theta = 1-\frac{r^2}{s^2}-\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^2r^2}{n^2s^2}$

বা, $\frac{r^2}{s^2} - \frac{2mr\cos\theta}{ns} + \frac{m^2}{n^2} = 1-\cos^2\theta + \frac{m^2r^2}{n^2s^2} - \frac{m^2r^2}{n^2s^2}$

$\therefore \frac{r^2}{s^2} - \frac{2mr\cos\theta}{ns} + \frac{m^2}{n^2} = \sin^2\theta$

প্রমাণিত

[বিশেষ নোট:
$a\cos\theta + b\sin\theta = c$ আকারের সমীকরনের সমাধান করতে (i) উভয় পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করতে হবে।
(ii) বামপক্ষকে $\cos A\cos B \pm \sin A\sin B$ সূত্রে সাজাতে হবে।
পরবর্তী ক্লাসে এই সূত্রের প্রয়োগ দেখানো হবে।]

৩। দৃশ্যকল্প : ০১ $\sec^{-1}\frac{5}{3}+\cot^{-1}\frac{12}{5}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$

দৃশ্যকল্প ০২ : $\sqrt{3}\sin\theta = 2+\cos\theta$

ক) দেখাও যে, $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

খ) দৃশ্যকল্প ০১ এ বর্ণিত রাশির মান $\frac{\pi}{2}$ যাচাই কর।

গ) $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$ সীমার মধ্যে দৃশ্যকল্প ০২ এর সমাধান কর।

সমাধান :

৩নং (ক) প্র: উত্তর

ধরি, $\tan^{-1}x = \theta$ বা, $x = \tan\theta$

আমরা জানি, $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

বা, $\sin 2\theta = \frac{2x}{1+x^2}$

বা, $2\theta = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

$\therefore 2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ (প্রমাণিত)

৩(খ) নং প্র. উ.

দৃশ্যকল্প ০১ অনুসারে পাই,

প্রদত্ত রাশি $= \sec^{-1}\frac{5}{3}+\cot^{-1}\frac{12}{5}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$

$= \tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

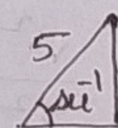
$= \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12}}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{16+5}{12}\times\frac{9}{9-5}\right)+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{21}{12}\times\frac{9}{4}\right)+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

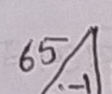
$= \tan^{-1}\frac{63}{16}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{63}{16}+\frac{16}{63}}{1-\frac{63}{16}\cdot\frac{16}{63}} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{63}{16}+\frac{16}{63}}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$ Ans.



$\sqrt{25-9} = 4$

$\therefore \sec^{-1}\frac{5}{3} = \tan^{-1}\frac{4}{3}$



$\sqrt{65^2-16^2} = 63$

$\therefore \sin^{-1}\frac{16}{65} = \tan^{-1}\frac{16}{63}$

[এখানে, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y = \frac{\pi}{2}$, $xy = 1$ সূত্র ব্যবহার করা যাবে]

৩(গ) নং প্র. উত্তর

পৃ. ০৭

দৃশ্যকল্প ০২ হতে পাই, প্রদত্ত সমীকরণ,

$\sqrt{3}\sin\theta = 2 + \cos\theta$; $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2$

∴ উভয় পক্ষকে $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ দ্বারা ভাগ করে,

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 1$

বা, $\sin\theta \cdot \sin\frac{\pi}{3} - \cos\theta \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1$

বা, $\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3} = -1$ [(−1) দ্বারা গুণ]

বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

বা, $\theta + \frac{\pi}{3} = (2n+1)\pi, n \in Z$ [∵ $\cos\theta = -1$ হলে $\theta = (2n+1)\pi$]

বা, $\theta = 2n\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$, $n \in Z$

বা, $\theta = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}$; $n \in Z$

∴ $\theta = \left(2n + \frac{2}{3}\right)\pi$; $n \in Z$

এখন, $n = 0$ হলে $\theta = \frac{2\pi}{3}$, (গ্রহণযোগ্য)

$n = 1$ হলে $\theta = \left(2 + \frac{2}{3}\right)\pi = \frac{8\pi}{3} > 2\pi$ (গ্রহণযোগ্য নয়)

$n = -1$ হলে $\theta = \left(-2 + \frac{2}{3}\right)\pi = -\frac{4\pi}{3}$ (গ্রহণযোগ্য)

$n = -2$ হলে $\theta = \left(-4 + \frac{2}{3}\right)\pi = -\frac{10\pi}{3} < -2\pi$ (গ্রহণযোগ্য নয়)

∴ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান, $\theta = \left(2n + \frac{2}{3}\right)\pi$, $n \in Z$ এবং $-2\pi \le \theta \le 2\pi$ সীমার মধ্যে, $\theta = \frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}$

Ans.

[Note: সমাধান থেকে সীমা দেওয়া থাকলে, সাধারণ সমাধান বের করার পর $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ বসাতে হবে যতক্ষণ পর্যন্ত সীমাস্থ মান পাওয়া যায়।]

৪। $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = \sin^{-1} x$

ক) $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{5}{7}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, $g\left(\sqrt{2} f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) + g\left(\sqrt{f(2\theta)}\right) = \frac{\pi}{2}$

গ) সমাধান কর: $4 f(x)\cdot f(2x)\cdot f(3x) = 1$; $0 < x < \pi$

সমাধান:

৪(ক) নং প্র. উত্তর

প্রদত্ত রাশি $= \sin\left(2\tan^{-1}\frac{5}{7}\right) = \sin\left(\sin^{-1}\frac{2\cdot\frac{5}{7}}{1+\left(\frac{5}{7}\right)^2}\right)$ $\left[\because 2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\right]$

$= \frac{\frac{10}{7}}{1+\frac{25}{49}} = \frac{10}{7} \times \frac{49}{74} = \frac{35}{37}$

Ans. $\frac{35}{37}$

৪(খ) নং প্র. উত্তর

উদ্দীপক হতে পাই, $g(x) = \sin^{-1} x$ এবং $f(x) = \cos x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

এবং $f(2\theta) = \cos 2\theta$

বামপক্ষ $= g\left(\sqrt{2} f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) + g\left(\sqrt{f(2\theta)}\right)$

$= g(\sqrt{2}\sin\theta) + g(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$ $\left[\because g(x) = \sin^{-1}x\right]$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{1-(\sqrt{\cos 2\theta})^2} + \sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{1-\cos 2\theta} + \sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sqrt{1-2\sin^2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2\sin^2\theta} + \sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{2\sin^2\theta + \cos 2\theta\right\}$

$= \sin^{-1}\left\{1-\cos 2\theta + \cos 2\theta\right\}$

$= \sin^{-1} 1$

$= \sin^{-1}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

৪(গ) নং প্র. উত্তর

দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x$ $\therefore f(2x) = \cos 2x$, $f(3x) = \cos 3x$

প্রদত্ত সমীকরণ, $4f(x) \cdot f(2x) \cdot f(3x) = 1$; $0 < x < \pi$

বা, $4\cos x \cos 2x \cos 3x = 1$ বা, $2\cos 2x(2\cos 3x \cos x) = 1$

বা, $2\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 1$ $[\because 2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)]$

বা, $2\cos 4x \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$

বা, $2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0$ $[\because 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta]$

বা, $\cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0$

হয়, $\cos 4x = 0$ বা, $4x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in Z$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$; $n \in Z$

অথবা, $2\cos 2x + 1 = 0$

বা, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ বা, $\cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3}$

বা, $2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; $n \in Z$

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $n \in Z$

$\therefore$ সাধারন সমাধান, $x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$, $n\pi + \frac{\pi}{3}$, $n\pi - \frac{\pi}{3}$.

এখন,

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে, $x = \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

$n = 2$ হলে, $x = \frac{5\pi}{8}, (2\pi + \frac{\pi}{3}), (2\pi - \frac{\pi}{3})$

$n = 3$ হলে, $x = \frac{7\pi}{8}, (3\pi + \frac{\pi}{3}), (3\pi - \frac{\pi}{3})$

$n = 4$ হলে, $x = \frac{9\pi}{8}, (4\pi + \frac{\pi}{3}), (4\pi - \frac{\pi}{3})$

$n = -1$ হলে, $x = -\frac{\pi}{8}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}$

$\therefore$ $0 < x < \pi$ সীমার মধ্যে গ্রহণযোগ্য মান হল,

$x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ Ans.

৫। একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ হল,
$f(x) = \sin^{-1}x$ এবং
$2\sin^2 x = 3\cos x$.
ক) দেখাও যে, $2f(x) = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.
খ) উদ্দীপকের সমীকরণটি সমাধান কর যখন $0<x<2\pi$.
গ) $f(x) + f(y) + f(z) = \pi$ হলে দেখাও যে,
$x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2} = 2xyz$.

সমাধান:

৫(ক) নং প্র. উত্তর

দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^{-1}x = \theta$ (ধরি)
বা, $x = \sin\theta$.

আমরা জানি, $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
বা, $\sin 2\theta = 2\sin\theta.\sqrt{1-\sin^2\theta}$
বা, $\sin 2\theta = 2x\sqrt{1-x^2}$
বা, $2\theta = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$
বা, $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$
$\therefore 2f(x) = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ প্রমাণিত

৫(খ) নং প্র. উত্তর

প্রদত্ত সমীকরণ, $2\sin^2 x = 3\cos x$ বা, $2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = 0$
বা, $2 - 2\cos^2 x - 3\cos x = 0$ বা, $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$
বা, $2\cos^2 x + 4\cos x - \cos x - 2 = 0$
বা, $2\cos x(\cos x + 2) - 1(\cos x + 2) = 0$
বা, $(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

হয়, $\cos x + 2 = 0$ বা, $\cos x = -2$ [গ্রহণযোগ্য নয় কারণ $-1 \le \cos x \le 1$]

অথবা, $2\cos x - 1 = 0$ বা, $\cos x = \frac{1}{2}$ বা, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in Z$

এখন, $n=0$ হলে, $x = \pm\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$
$n=1$ হলে, $x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
$n=2$ হলে, $x = 4\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore 0<x<2\pi$ সীমার মধ্যে, $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ Ans.

৫ নং (গ) প্র. উত্তর

দেওয়া আছে, $f(x) = \sin^{-1}x = A$ (ধরি) বা, $x = \sin A$

$\therefore f(y) = \sin^{-1}y = B$ (ধরি) বা, $y = \sin B$

এবং $f(z) = \sin^{-1}z = C$ (ধরি) বা, $z = \sin C$

প্রদত্ত সমীকরণ, $f(x) + f(y) + f(z) = \pi$

বা, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \pi$

বা, $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \pi - \sin^{-1}z$

বা, $A + B = \pi - C$ ——— (1)

বামপক্ষ $= x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} + z\sqrt{1-z^2}$

$= \sin A\sqrt{1-\sin^2 A} + \sin B\sqrt{1-\sin^2 B} + \sin C\sqrt{1-\sin^2 C}$

$= \sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C$

$= \frac{1}{2}(2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B) + \sin C\cos C$

$= \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B) + \sin C.\cos C$

$= \frac{1}{2}.2\sin\frac{2A+2B}{2}.\cos\frac{2A-2B}{2} + \sin C.\cos C$

$= \sin(A+B).\cos(A-B) + \sin C.\cos C$

$= \sin(\pi - C).\cos(A-B) + \sin C.\cos C$

$= \sin C.\cos(A-B) + \sin C.\cos C$

$= \sin C\{\cos(A-B) + \cos C\}$

$= \sin C\{\cos(A-B) + \cos(\pi - \overline{A+B})\}$

$= \sin C\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$

$= \sin C.2\sin A\sin B$

$= 2\sin A.\sin B.\sin C$

$= 2xyz$

$=$ ডানপক্ষ

প্রমাণিত